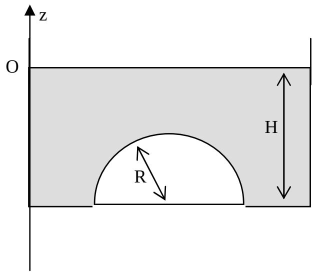
TD Thermo2 : ELEMENTS DE STATIQUE DES FLUIDES

Applications directes du cours

1. Equation Fondamentale de la Statique des Fluides.
   a. Rappeler la définition d'un fluide homogène incompressible.
   b. Etablir la loi fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur reliant dP et dz, en prenant l'axe Oz ascendant.
   c. A la surface d'un océan, la pression vaut $P_0 = 1\text{bar}$. Un plongeur descend 10 m sous la surface. Calculer la pression ressentie par le plongeur à cette profondeur.
   d. Au dessus de la surface de l'eau s'élève un rocher de 10 m. Calculer la pression en haut du rocher en supposant que la température y est la même qu'à la surface de l'eau $\left(T_0 = 293\text{K}\right)$.

   Données : $\rho_{eau} = 10^3\text{kg.m}^{-3}$; $M_{air} = 29\text{g.mol}^{-1}$; $R = 8{,}31\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; $g = 10\text{m.s}^{-2}$.

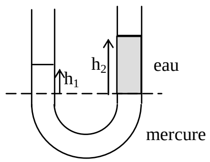
2. On considère un objet hémisphérique de rayon R rempli d'air à la pression $P_0 = 1\text{bar}$ et posé au fond d'un récipient rempli d'eau sur une hauteur $H \gg R$. L'eau est supposée homogène et incompressible de masse volumique $\rho_{eau} = 10^3\text{kg.m}^{-3}$. L'origine de l'axe Oz ascendant est choisie à la surface de l'eau où la pression vaut P_0.
   a. Déterminer la résultante des forces pressantes exercées sur l'objet.
   b. On suppose maintenant qu'une fine couche d'eau s'est glissée entre l'objet et le fond du récipient. Déterminer la résultante des forces pressantes exercées sur l'objet.

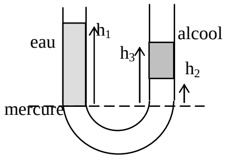


3. Un verre contenant un glaçon, de volume V et de masse volumique μ, est rempli à ras bord d'eau liquide de masse volumique μ_0.
   a. Exprimer en fonction des données le volume v_i du glaçon immergé dans l'eau ainsi que le volume v du glaçon lorsqu'il aura fondu.
   b. Faut-il prévoir une éponge pour essuyer la table ? Que se passe-t-il si à la place de l'eau il y a du whisky ?

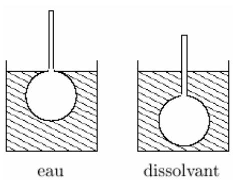
4. On note respectivement ρ_1, ρ_2, ρ_3 les masses volumiques de l'eau du mercure et de l'alcool.
   a. Un système de deux liquides non miscibles (eau, mercure) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. Exprimer le rapport $\frac{h_2}{h_1}$ en fonction des masses volumiques ρ_1 et ρ_2. Commenter.
   b. Un système de trois liquides non miscibles (eau, mercure, alcool) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. Les hauteurs respectives d'eau et d'alcool ainsi que la distance entre les niveaux de mercure sont indiqués sur la figure.
   Exprimer ρ_3 en fonction de ρ_1, ρ_2, h_1, h_2 et h_3.

Données : $h_1 = 0{,}8\text{m}$; $h_2 = 0{,}05\text{m}$; $h_3 = 0{,}2\text{m}$; $\rho_1 = 10^3\text{kg.m}^{-3}$; $\rho_2 = 1{,}36.10^4\text{kg.m}^{-3}$.





5. Un densimètre, servant à mesurer la densité d'un liquide par rapport à l'eau, est constitué d'un ballon sphérique de rayon $R = 12\text{mm}$, lesté et surmonté d'un tube cylindrique de rayon $r = 2\text{mm}$ portant des graduations régulièrement espacées d'une distance ℓ. La masse totale du densimètre est notée M. Plongé dans l'eau pure de masse volumique ρ_0, le densimètre affleure à l'équilibre à la graduation $n = 0$ située à la base du tube. Plongé dans du dissolvant de masse volumique ρ_1, il affleure à la graduation $n_1 = 80$. On note V le volume du ballon sphérique et v le volume délimité par deux graduations consécutives.

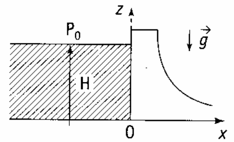


   a. En traduisant l'équilibre du densimètre, déterminer la relation entre ρ_0, ρ_1, V, v et n_1.
   b. En déduire la valeur numérique du volume v.
   c. Le densimètre est maintenant plongé dans du benzène. Il affleure à la graduation $n_2 = 28$. En déduire la densité d du benzène par rapport à l'eau.

   Données : $\rho_0 = 1\text{g.cm}^{-3}$; $\rho_1 = 0{,}72\text{g.cm}^{-3}$.

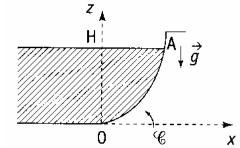
6 : *Retenue d'eau par un barrage.(**)*

Un barrage doit permettre de réaliser une retenue d'eau sur une profondeur H et une largeur L. La pression de l'air est P_0, et la masse volumique de l'eau est constante et vaut ρ_0.



1. Dans le cas d'un profil de barrage simple, déterminer la résultante $\vec{F}$ des efforts exercés par l'eau sur le barrage.
2. Le profil du barrage est modifié. Il correspond à une courbe d'équation $z = \frac{x^2}{h}$.

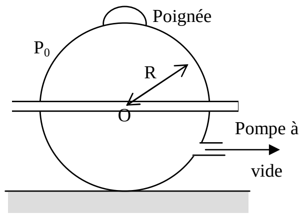
   On notera x_0 l'abscisse du point le plus haut de la courbe atteint par l'eau.
   a. Donner l'expression de la composante horizontale $\vec{F}_x$ de la résultante des efforts exercés par l'eau sur le barrage.
   b. Donner l'expression de la composante verticale $\vec{F}_z$ de la résultante des efforts exercés par l'eau sur le barrage.



7 : *Hémisphères de Magdebourg.(**)*

Soit une sphère constitué de deux hémisphères dits « de Magdebourg », en contact suivant un cercle de rayon R. L'hémisphère inférieur, supposé fixe, est relié à une pompe à vide destinée à rendre la pression intérieure très faible (par rapport à la pression atmosphérique P_0).

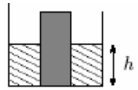
1. Exprimer en fonction de P_0 et R, la résultante des forces pressantes subies par l'hémisphère supérieur.
2. En déduire la force qu'un opérateur doit exercer sur la poignée de l'hémisphère supérieur dans le but de séparer les deux hémisphères.
3. Application numérique : Calculer cette force si $P_0 = 10^5\text{Pa}$ et $R = 5\text{cm}$.



8 : *Levier hydraulique. (*)*

Un cylindre homogène, de masse volumique μ, de hauteur H et de section S, repose sur sa base au fond d'un récipient initialement vide. On verse progressivement de l'eau, de masse volumique μ_0, dans le récipient.

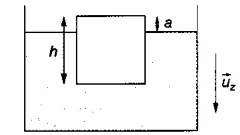
En supposant qu'une très fine pellicule d'eau s'infiltre sous le cylindre, déterminer à partir de quelle hauteur d'eau versée $h_{\lim}$ le cylindre va se soulever, en utilisant le théorème d'Archimède puis sans utiliser le théorème d'Archimède.

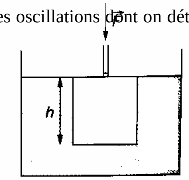


9 : *Flotteur. (*)*

Un flotteur de forme cylindrique (hauteur $h = 3\text{cm}$, rayon $R = 1\text{cm}$, température 0°C) flotte à la surface d'une eau à 0°C. On appelle a la hauteur du flotteur à l'air libre. On prendra $\mu_\ell = 10^3\text{kg.m}^{-3}$; $\mu_g = 920\text{kg.m}^{-3}$.

1. Déterminer puis calculer le rapport $\frac{a}{h}$ en fonction des masses volumiques de l'eau μ_ℓ et de la glace μ_g.
2. Quelle force $\vec{F}_{op}$ doit exercer un opérateur verticalement pour maintenir ce flotteur à la lisière de la surface de l'eau ?
3. L'opérateur relâche le flotteur. Montrer que le flotteur effectuera des oscillations dont on déterminera la période. On négligera les frottements.





10 : Champs de pression. (**)

1. Dans une atmosphère à gradient de température :

On peut considérer que dans une zone de l'atmosphère terrestre située entre la surface de la Terre et environ 10km d'altitude $(0 < z < 10\text{km})$, la température décroît avec l'altitude selon une loi affine : $T = T_0(1 - az)$, et que le champ de pesanteur g reste uniforme. L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\text{g.mol}^{-1}$. L'indice zéro est relatif aux grandeurs au niveau de la mer $(z = 0)$ où $T_0 = 293\text{K}$ et $P_0 = 1\text{atm}$.

a. Sachant qu'au sommet de l'Everest $(z_1 = 8848\text{m})$, la température est $t_1 = -40°\text{C}$, calculer la constante a.

b. En utilisant l'équation fondamentale de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.

Introduire la constante $H = \dfrac{RT_0}{Mg}$. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_0, H, a et z puis en fonction de P_0, T_0, H, a et $\tilde{T}$

c. Calculer la pression P_1 au sommet de l'Everest.

2. Dans une atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable :

Le champ de pesanteur terrestre varie avec l'altitude z selon la relation :

$$g(z) = g_0\left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2,$$ g_0 désignant le champ de pesanteur au niveau du sol et R_T le rayon de la Terre.

Considérons un modèle de l'atmosphère isotherme en équilibre, de température T_0. L'air atmosphérique est supposé isotherme en équilibre à la température T_0 et est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M. L'indice zéro est relatif aux grandeurs au niveau du sol $(z = 0)$ où $P_0 = 1\text{atm}$.

En utilisant l'équation fondamentale de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.

Introduire la constante $H = \dfrac{RT_0}{Mg_0}$. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_0, H, R_T et z.

11 : Etude d'une montgolfière.(**)

On considère une enveloppe de volume V_0 constant, remplie d'air supposé parfait, à la température T'. Ce ballon est ouvert à sa partie inférieure, de façon à rester constamment en équilibre de pression avec l'air extérieur à la température T. On note M_0 la masse totale de l'enveloppe, du dispositif de chauffage, de la nacelle est des passagers.

1. Déterminer la relation qui lie les masses volumiques de l'air ρ à température et pression quelconque et ρ_0 (masse volumique de l'air dans les conditions normales P_0 et T_0).
2. Montrer que la relation liant T' notamment à T et P pour que le ballon soit en équilibre du point de vue mécanique, à la pression P, s'écrit $\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T'} = \dfrac{P_0 M_0}{P T_0 \rho_0 V_0}$.
3. Quelle condition doit vérifier T' pour que le ballon décolle ?

Données : $V_0 = 1200\text{m}^3$; $M_0 = 400\text{kg}$; $g = 9{,}8\text{m.s}^{-2}$; $P = P_0 = 10^5\,\text{Pa}$; $T = 290\text{K}$; $T_0 = 273\text{K}$; $\rho_0 = 1{,}3\text{ kg.m}^{-3}$.

12 : Altitude plafond d'un aérostat.

Un aérostat est constitué par une enveloppe de volume V, remplie d'hélium (V ne peut dépasser la valeur maximale $V_{\max}$) à laquelle est attachée une nacelle. L'ensemble enveloppe nacelle, accessoires et passagers a une masse M_0. Il y a constamment communication entre l'air atmosphérique et le gaz du ballon ce qui assure l'équilibre mécanique et thermique entre les deux fluides.

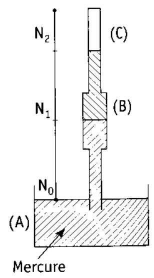
1. Faire le bilan des forces appliquées à l'aérostat. Exprimer leur résultante $\vec{R}$ en fonction de $\vec{g}, V, M_0, M_{air}, M_{He}$ et $\rho_{He}(z)$.
2. Quels sont les termes de cette expression qui varient lorsque l'altitude z augmente ? Expliquer pourquoi l'ascension est la succession d'une phase à masse constante et d'une phase à volume constant.
3. À quelle condition, liant le volume initial V_0 et la masse M_0, le ballon pourra-t-il s'élever ?
4. Si l'aérostat évolue dans une atmosphère isotherme (T_0), $P(z) = P_0 e^{\frac{-z}{H}}$ avec $H = \dfrac{RT_0}{M_g g}$.
   a. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ d'un gaz situé à l'altitude z en fonction de ρ_0, H et z.
   b. Quelle est l'altitude d'équilibre $z_{\max}$, appelée plafond, de l'aérostat ?

5. Si l'aérostat évolue dans une atmosphère à gradient de température $T = T_0(1 - az)$, $P = P_0(1 - az)^{\alpha}$ avec $\alpha = \dfrac{M_g g}{aRT_0}$.
   a. Exprimer la masse volumique $\rho(z)$ d'un gaz situé à l'altitude z en fonction de ρ_0, α, a et z.
   b. Quelle est l'altitude d'équilibre $z'_{\max}$, appelée plafond, de l'aérostat ?

13 : Baromètre de Huyghens.(**)

Cet appareil est constitué sur une cuve à mercure (A), où le mercure a une surface libre d'aire S_0, d'un tube barométrique comportant un renflement (B) de section S_1 surmonté d'un tube (C) plus fin, de section S_2.

Pour une valeur P_0 de la pression atmosphérique, le mercure monte, à l'équilibre, jusqu'au niveau N_1 dans B, celui-ci étant surmonté de glycérine (μ_g) jusqu'au niveau N_2. Le mercure (μ_{Hg}) dans la cuve correspond au niveau N_0. On suppose que le tube au-dessus de la glycérine est vide.



1. Exprimer P_0 en fonction de $N_0, N_1, N_2, \mu_g, \mu_{Hg}$ et g.

La pression atmosphérique varie légèrement, et devient P = P_0 + δP, ce qui correspond à une variation δH de la pression exprimée en hauteur de mercure ($\delta P = \mu_{Hg} g \delta H$).

2. Exprimer δP en fonction de $\delta N_0, \delta N_1, \delta N_2, \mu_g, \mu_{Hg}$ et g.
3. Quelle relation existe-t-il entre les $\delta N_0, \delta N_1, \delta N_2$ et les sections S_0, S_1, S_2 ? En déduire l'expression du rapport $\dfrac{\delta N}{\delta H}$ en fonction de $S_0, S_1, S_2, \mu_g, \mu_{Hg}$ et g. Le calculer. Quel est l'intérêt de ce dispositif ?

   A.N. : $S_0 = 50\text{cm}^2$; $S_1 = 5\text{cm}^2$; $S_2 = 0{,}25\text{cm}^2$; $\mu_g = 1{,}05\text{g.cm}^{-3}$; $\mu_{Hg} = 13{,}6\text{g.cm}^{-3}$.

14 : Influence de la compressibilité de l'eau sur le champ de pression.

On s'intéresse à la pression de l'eau à une profondeur assez élevée sous l'eau. Le champ de pesanteur $g = 9{,}8\text{m.s}^{-2}$ est supposé uniforme. On donne le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = 4{,}4.10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$. Sous $P_0 = 1\text{bar}$, la masse volumique de l'eau est $\mu = 1{,}00.10^3\,\text{kg.m}^{-3}$.

1. En supposant l'eau incompressible, calculer la pression P_1 dans une fosse océanique de profondeur $H = 10\text{km}$.
2. On tient maintenant compte de la compressibilité de l'eau.
   a. Montrer qu'à température constante, $\chi_T = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \mu}{\partial P}$.
   b. En déduire l'expression de la masse volumique μ de l'eau en fonction de P_0, μ_0, χ_T et P.
   c. En utilisant l'équation fondamentale de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par $P(z)$.
   d. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de P_0, μ_0, χ_T, g et z.
   e. Recalculer la pression P_1' dans la fosse océanique de profondeur $H = 10\text{km}$.

Réponses et éléments de réponses :

1 : b. $dP = -\rho(M)g(M)dz$. c. $P(-10\text{m}) = 2\text{bar}$. d. $P(10\text{m}) = 0{,}999\text{bar}$.

2 : a. $\vec{F} = \mu\pi R^2(H - \frac{2R}{3})\vec{g} - P_0\pi R^2\vec{e}_z$. b. $\vec{F} = -\frac{2}{3}\pi R^3\mu\vec{g}$.

3 : a. $v_i = \frac{\mu V}{\mu_0}$; $v = \frac{\mu V}{\mu_0}$ donc $v_i = v$. b. $v_{i,w} = \frac{\mu V}{\mu_w} > v$.

4 : a. $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$; b. $\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}$: $\rho_3 = 800\text{kg.m}^{-3}$.

5 : a. $V\rho_0 = (V + n_1 v)\rho_1$. b. $v = \frac{4\pi R^3}{3n_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)$: $v = 3{,}52.10^{-2}\,\text{cm}^3$. c. $d = \frac{V}{V + n_2 v} = \frac{1}{1 + \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)}$: $d = 0{,}880$.

6 : 1. $\vec{F} = LH\left(P_0 + \frac{\rho_0 gH}{2}\right)\vec{e}_x$. 2. $\vec{F}_x = LH\left(P_0 + \frac{\rho_0 gH}{2}\right)\vec{e}_x$ et $\vec{F}_z = -L\sqrt{Hh}\left(P_0 + \frac{2\rho_0 gH}{3}\right)\vec{e}_z$.

7 : 2. $\vec{F} = \pi R^2 P_0 \vec{e}_z$; 2. F = 785 N.

8 : 1. $h_{\lim} = \frac{\mu H}{\mu_0}$ $\left(2^{\text{ème}}\text{ méthode} : P(z = -h_{\lim})S\vec{e}_z + m\vec{g} = \vec{0}\right)$.

9 : 1. $\frac{a}{h} = 1 - \frac{\mu_g}{\mu_\ell}$; $\frac{a}{h} = 0{,}087$. 2. $\vec{F}_{op} = \mu_l \pi R^2 a\vec{g}$. 3. $\ddot{z} + \frac{g}{h-a}\left(z - z_{éq}\right) = 0$. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{h-a}{g}}$.

10 : 1.a. $a = 2{,}31.10^{-5}\text{m}^{-1}$. 1.b. $P(z) = P_0(1 - az)^{\frac{1}{aH}} = P_0\left(\frac{T(z)}{T_0}\right)^{\frac{1}{aH}}$. 1.c. $P_1 = 0{,}318\text{atm}$. 2. $P(z) = P_0 e^{\frac{-R_T z}{H(R_T + z)}}$.

11 : 1. $\rho = \frac{PT_0}{P_0 T}\rho_0$. 3. $T' > \frac{1}{\frac{1}{T} - \frac{M_0 P_0}{PT_0\rho_0 V_0}} = 399\text{ K}$.

12 : 1. $\vec{R} = \left(M_0 - \rho_{He}(z)V(z)\left(\frac{M_{air}}{M_{He}} - 1\right)\right)\vec{g}$. 3. $V_0 > \frac{M_0 M_{He}}{\rho_{He,0}(M_{air} - M_{He})} = \frac{M_0 RT_0}{P_0(M_{air} - M_{He})}$. 4.a. $\rho(z) = \rho_0 e^{\frac{-z}{H}}$.

4.b. $z_{\max} = H\ln\frac{P_0 V_{\max}(M_{air} - M_{He})}{M_0 RT_0}$. 5.a. $\rho = \rho_0(1 - az)^{\alpha - 1}$. 5.b. $z'_{\max} = \frac{1}{a}\left(1 - \left(\frac{M_0 RT_0}{P_0 V_{\max}(M_{air} - M_{He})}\right)^{\frac{1}{\alpha - 1}}\right)$.

13 : 1. $P_0 = \mu_g g(N_2 - N_1) + \mu_{Hg} g(N_1 - N_0)$. 3. $\frac{\delta N}{\delta H} = \frac{1}{\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0} + \frac{\mu_g}{\mu_{Hg}}\left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)}$, $\frac{\delta N}{\delta H} = 7{,}8$.

14 : 1. $P_1 = 1001\text{bar}$. 2. b. $\mu = \mu_0 e^{-\chi_T(P - P_0)}$. d. $P(z) = P_0 + \frac{1}{\chi_T}\ln(1 - \mu_0\chi_T gz)$, $P'_1 = 1021\text{bar}$.