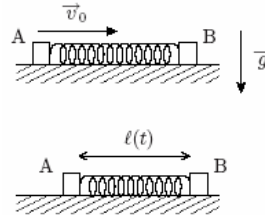


TD Méca 8 : SYSTEMES DE DEUX POINTS MATERIELS.

Exercices

1 : Système avec ressort (*)

Deux points matériels A et B, de même masse m , sont reliés par un ressort (k, ℓ_0). Ils reposent sur un support plan horizontal et sont au repos. A la date $t = 0$, un choc communiqué au point A une vitesse $\vec{v}_0$. Les points matériels peuvent glisser sans frottement sur le plan horizontal. On appelle S le système formé par les deux points. La longueur instantanée du ressort est $\ell(t)$. Le référentiel lié au support plan est supposé galiléen.



- Déterminer les caractéristiques du mouvement du centre d'inertie G du système S.
- Quelle est la nature du mouvement du référentiel barycentrique R^* ? Que peut-on en déduire ?

On définit le mobile réduit comme le point matériel fictif M tel que $\vec{GM} = \vec{AB}$ et de masse $\mu = \frac{m}{2}$.

- Etablir l'équation différentielle du mouvement du mobile réduit dans le référentiel barycentrique R^* . En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\ell(t)$.
- Déterminer l'expression de $\ell(t)$ en fonction des données.

2 : Binaires. (**)

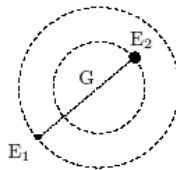
On considère deux étoiles E_1 et E_2 , assimilées à des points matériels de masses respectives m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle et telles que le système $S = \{E_1; E_2\}$ est isolé. Dans le référentiel barycentrique R^* , on suppose que ces deux étoiles décrivent des orbites circulaires de rayon r_1 et r_2 . On pose $D = r_1 + r_2$.

- Pourquoi les deux étoiles ont nécessairement la même période de révolution T ?

- En utilisant la définition du centre d'inertie, montrer la relation $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$.

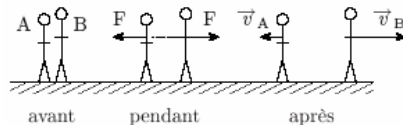
- En analysant le mouvement du mobile réduit, montrer la relation $\frac{T^2}{D^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$.

- Deux étoiles α et β décrivent des orbites circulaires de rayon $r_1 = 1,00 \cdot 10^9$ km et $r_2 = 5,00 \cdot 10^8$ km avec une période orbitale $T = 44,5$ années terrestres. Calculer leurs masses m_1 et m_2 .



3 : Sur une patinoire. (**)

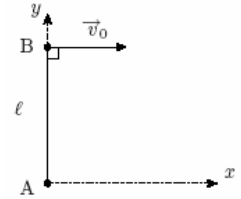
Deux patineurs A et B, de masses respectives $m_A = 55$ kg et $m_B = 75$ kg, se tiennent immobiles côte à côte sur une surface plane horizontale gelée. On néglige l'effet des frottements sur leur mouvement. Ils se repoussent alors mutuellement, en exerçant une force d'intensité constante $F = 105$ N et en s'éloignant mutuellement d'une distance $d = 70$ cm. Suite à cela, le contact est rompu et les deux patineurs progressent indépendamment, avec des vitesses v_A et v_B constantes. On définit le système S constitué par les deux patineurs.



- Quelle propriété le centre de gravité présente-t-il au cours du temps ? En déduire une première relation entre les vitesses v_A et v_B .
- Exprimer le travail W_{int} des forces intérieures au système S au cours de la poussée. En déduire une deuxième relation entre les vitesses v_A et v_B .
- Calculer les vitesses v_A et v_B .

4 : Glissade. (**)

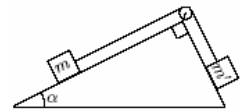
Deux points matériels A et B, de même masse m , sont reliés par un fil inextensible de longueur ℓ et peuvent glisser sans frottement sur une surface plane horizontale. A la date $t = 0$, ils sont tous deux immobiles et le fil est tendu. Un choc communiqué alors au point B la vitesse initiale $\vec{v}_0$ indiquée sur le schéma. On suppose que le fil reste constamment tendu par la suite.



- Déterminer le mouvement du centre d'inertie G du système S des deux points A et B. Quelle conséquence peut-on en tirer sur le référentiel barycentrique R^* ?
- Montrer que les points A et B ont un mouvement de rotation uniforme dans le référentiel barycentrique.
- Déterminer l'expression de leur vitesse angulaire de rotation barycentrique ω^* , en fonction de v_0 et ℓ .
- Déterminer les équations horaires des deux masses.

5 : Deux masses sur un plan incliné. (***)

Deux masses m et m' , reliées par un fil idéal, sont posées sur deux plans inclinés orthogonaux d'intersection horizontale. Les deux masses et le fil sont donc dans un même plan vertical. Initialement les deux masses sont immobiles et on suppose $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et la poulie idéale.

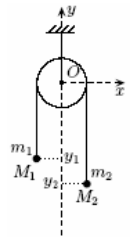


- Déterminer l'accélération des masses dans l'hypothèse où il n'y a aucun frottement.
- Le contact de m avec le plan est en contact avec frottement solide caractérisé par un coefficient $f = \tan \varphi$. En envisageant les deux cas limites du mouvement dans un sens où dans l'autre, déterminer le domaine des valeurs de m' qui assurent l'équilibre. On exprimera le résultat en fonction de m , φ et α .

6 : Machine d'Atwood. (**)

On considère un système composé de deux masses m_1 et m_2 suspendues en M_1 et M_2 , aux extrémités d'un fil sans masse, inextensible de longueur ℓ . Ce fil passe dans la gorge d'une poulie idéale, sans masse, de rayon R . Il n'y a aucun frottement (ce qui implique que le fil glisse dans la gorge de la poulie). Le référentiel d'étude, lié au point O, est supposé galiléen.

- Exprimer la longueur ℓ en fonction de $y_1(t)$, $y_2(t)$ et R . En déduire une relation entre $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ puis entre $\ddot{y}_1(t)$ et $\ddot{y}_2(t)$.
- A l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué successivement aux deux masses, déterminer les accélérations de M_1 et M_2 en fonction des grandeurs caractéristiques du problème.
- Retrouver ce résultat à partir du théorème du moment cinétique appliqué au système $S = \{M_1 + M_2 + \text{fil}\}$.
- Retrouver ce résultat à partir d'un théorème énergétique appliqué au système $S = \{M_1 + M_2 + \text{fil}\}$.



Réponses et éléments de réponses :

$$1 : 1. \vec{v}_G = \frac{\vec{v}_0}{2} . 4. \ell(t) = \ell_0 - v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t\right) . 2 : m_1 = \frac{4\pi^2 D^3}{3GT^2} ; m_2 = \frac{8\pi^2 D^3}{3GT^2} . m_1 = 3,38 \cdot 10^{29} \text{ kg} ; m_2 = 6,75 \cdot 10^{29} \text{ kg} .$$

$$3 : 1. \vec{v}_B = \frac{-m_A}{m_B} \vec{v}_A . 2. m_B v_B^2 + m_A v_A^2 = 2Fd . 3. v_B = 0,91 \text{ lm.s}^{-1}, v_A = 1,24 \text{ m.s}^{-1} .$$

$$4 : 2. \vec{L}^* = \text{cte} . 3. \omega^* = \frac{-v_0}{\ell} . 4. \vec{OA}(t) = \left(\frac{v_0 t}{2} - \frac{\ell}{2} \sin\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \cos\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right) \vec{e}_y ,$$

$$\vec{OB}(t) = \left(\frac{v_0 t}{2} + \frac{\ell}{2} \sin\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \cos\left(\frac{v_0 t}{\ell}\right) \right) \vec{e}_y ,$$

$$5 : 2. m(\tan \alpha - \tan \varphi) \leq m' \leq m(\tan \alpha + \tan \varphi) .$$

$$6 : 2. \ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g ; \ddot{y}_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g .$$