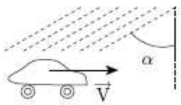
TD Méca 7 : CHANGEMENTS DE REFERENTIELS.

Applications directes du cours

1. Mouvement apparent de la pluie.

Un automobiliste roule à la vitesse constante $V = 50\text{km.h}^{-1}$ sur une route rectiligne horizontale. Il remarque que les gouttes d'eau de pluie, vues de son véhicule, ont des trajectoires inclinées de $\alpha = 60°$ par rapport à la verticale.
Sachant que la pluie tombe en fait verticalement pour un observateur immobile, déterminer la vitesse de chute v des gouttes d'eau de pluie par rapport à la Terre.



2. Aller-retour sur un canot moteur

Un canot moteur remonte le courant d'une rivière qui coule à $u = 3\text{km.h}^{-1}$ par rapport aux rives. Le canot moteur avance à la vitesse constante de $v = 15\text{km.h}^{-1}$ par rapport au courant. Il perd sa bouée de sauvetage qui tombe à l'eau et s'en aperçoit au bout de 5 minutes. Il fait alors demi-tour pour la rattraper.
Combien de temps faudra-t-il au canot pour rejoindre la bouée ?

3. Poids apparent

Une personne de masse $m = 60\text{kg}$ se tient immobile sur un pèse-personne, dans un ascenseur animé d'un mouvement vertical descendant d'accélération constante $\vec{a}_0$ $\left(a_0 = 1\text{m.s}^{-2}\right)$ au début de son mouvement.

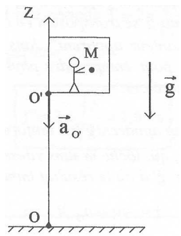
a. Montrer que tout se passe comme si la personne se pesait sur la Terre, à condition de remplacer son poids par un poids apparent.
Exprimer le champ de pesanteur apparent $\vec{g}\,'$ en fonction de $\vec{g}$ et $\vec{a}_0$. Le calculer.

b. Quelle est la masse m_{app} affichée par le pèse-personne ?

4. Chute d'une masse dans un ascenseur

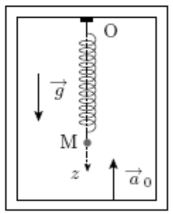
On considère un ascenseur en translation verticale par rapport au sol avec une accélération $\vec{a}_{O'}$. Un passager lâche un objet ponctuel de masse *m* sans vitesse initiale.

a. Quel sera le mouvement de la masse *m* dans l'ascenseur ?
b. Que se passe-t-il dans le cas où $\vec{a}_{O'} = \vec{g}$? Interpréter le phénomène.
c. Comment cela pourrait-il se produire ?



5. Masse suspendue à un ressort dans un ascenseur uniformément accéléré.

Un ascenseur débute sa montée. Dans cette phase, on peut supposer son accélération $\vec{a}_0$ par rapport à l'immeuble, constante. Dans l'ascenseur, on suspend une masse M (m) à un ressort (k, l_0).



a. Déterminer l'équation différentielle en $z_1(t)$ du mouvement de la masse par rapport à l'ascenseur. (PFD ou TEM)
b. Quelle est la longueur puis l'allongement du ressort lorsque M est à l'équilibre par rapport à l'ascenseur ?
c. A.N. : Après 5m de montée uniformément accélérée, la vitesse de l'ascenseur est de 2m.s^{-1}. Calculer l'allongement de l'élastique $\left(k = 13\text{N.m}^{-1}\right)$ sachant que $m = 0{,}1\text{kg}$ est immobile dans l'ascenseur.
d. La masse est lancée depuis sa position d'équilibre avec la vitesse $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}_z$ par rapport à l'ascenseur. Déterminer l'équation horaire $z_1(t)$ du mouvement de M par rapport à l'ascenseur.

6. Pendule simple suspendu dans un wagon uniformément accéléré.

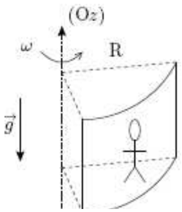
Dans un wagon, on suspend un pendule simple $\left(\text{M}(m), L\right)$. Au démarrage du train, on peut supposer son accélération $\vec{a}_0$ par rapport au quai, constante.

a. Déterminer l'équation différentielle en $\theta(t)$ du mouvement du pendule par rapport au train. (TMC ou TEM ou PFD)
b. Quelle est la position de la masse à l'équilibre par rapport au train ?
c. On envisage de petites oscillations autour de cette position d'équilibre. En déterminer la pulsation propre.

7. Attraction foraine

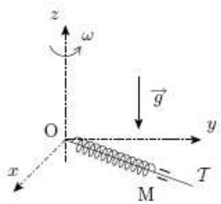
Un manège est constitué d'un grand cylindre creux d'axe vertical (Oz) et de rayon intérieur R. Des personnes prennent place dans le cylindre et l'ensemble est mis en rotation à la vitesse angulaire ω. Lorsque la vitesse de rotation est suffisante, le plancher est retiré et les personnes restent « collées » à la paroi.

a. Faire le bilan des forces exercées sur une personne à l'équilibre dans le manège. Quelle hypothèse sur les forces mises en jeu est nécessaire à la possibilité de cet équilibre ?
b. Déterminer en fonction du coefficient de frottement μ sur la paroi du cylindre, de g et de R, la vitesse minimale de rotation du manège pour que le plancher puisse être retiré.



8. Ressort monté sur tige en rotation.

On considère une tige (T) (dont une extrémité est en O) en rotation dans le plan xOy autour de l'axe Oz à vitesse angulaire ω constante. Sur cette tige, on monte un ressort (k, l_0), dont une extrémité est fixée en O et l'autre reliée à un anneau $\text{M}(m)$ susceptible de se déplacer sans frottement sur la tige.

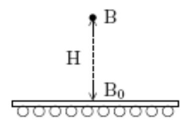


a. Faire l'inventaire des forces appliquées au point matériel $\text{M}(m)$. Lesquelles sont conservatives ? Lesquelles ne fournissent pas de travail au point $\text{M}(m)$ en mouvement par rapport à la tige (T) ?
b. Déterminer l'équation différentielle en $r(t)$ du mouvement de l'anneau par rapport à la tige. (TEM ou PFD)
c. Quelle est la position de l'anneau à l'équilibre par rapport à la tige ?
d. Discuter la nature du mouvement de l'anneau par rapport à la tige selon que $\omega^2 > \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ ou $\omega^2 < \omega_0^2$.
e. Déterminer les composantes de la réaction de la tige sur l'anneau en fonction de m, g, ω et $\dot{r}$.

Exercices

9 : *Tapis roulant horizontal.(*)*

Un enfant se tient immobile sur un tapis roulant horizontal. Il lâche une bille B d'une hauteur $H = 1\text{m}$ par rapport au tapis, sans vitesse initiale par rapport à lui-même, à l'aplomb du point B_0 sur le tapis. On ne tient pas compte dans l'exercice des frottements exercés par l'air sur la bille.



1. Le tapis roulant avance à la vitesse uniforme $v = 4{,}5\,\text{km.h}^{-1}$.
Déterminer la position du point d'impact I de la bille sur le tapis par rapport à B_0. Quelle est la trajectoire de la bille pour un observateur situé à côté du tapis roulant ?
2. Le tapis roulant est maintenant uniformément freiné à l'instant même où l'enfant lâche la bille : il s'arrête au bout d'une durée $\Delta t = 1\text{s}$.
Déterminer la position du point d'impact I de la bille sur le tapis par rapport à B_0.

10 : *Référentiels en rotation.(**)*

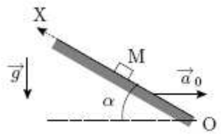
Dans le plan xOy, une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω.

Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi $r = r_0\left[\cos(\omega t)+\sin(\omega t)\right]$ avec $r_0 = cste$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de r_0 et ω :
   a. la vitesse relative du mobile M ; b. sa vitesse d'entraînement ; c. sa vitesse absolue et son module.
2. Déterminer à l'instant t en fonction de r_0 et ω :
   a. l'accélération relative du mobile ; b. l'accélération d'entraînement du mobile ;
   c. l'accélération complémentaire ; d. l'accélération absolue et son module.

11 : *Glissement sur un plan incliné.(*)*

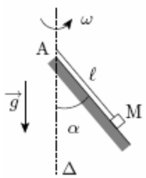
Un point matériel $\mathrm{M}(m)$ peut glisser sans frottement sur un support plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Ce plan est en mouvement de translation uniformément accélérée, $\vec{a}_0$, par rapport au référentiel terrestre.



1. Etablir l'expression de l'accélération $\ddot{X}$ du point M relativement au plan incliné.
2. A la date $t=0$, le point M est abandonné sans vitesse initiale par rapport au plan. A quelle condition l'angle α le point M remonte-t-il la pente ? Que devient cette condition si on prend en compte des frottements solides de coefficient μ ?

12 : *Décollement d'un support en rotation .(*)*

Un support plan incliné d'un angle α par rapport à la verticale est en rotation uniforme autour de l'axe vertical Δ, à la vitesse angulaire ω. Un point matériel $\mathrm{M}(m)$ est attaché à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ dont l'autre extrémité est fixée en un point A de l'axe de rotation. Le point M est immobile sur le plan incliné.

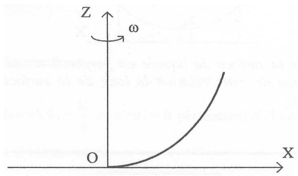


1. Déterminer l'expression de l'intensité de la réaction normale N du support plan sur le point M.
2. En déduire à partir de quelle valeur limite $\omega_{\lim}$ vitesse angulaire de rotation le point M décolle du support.

13 : *Gouttière en rotation.(**)*

On considère une gouttière en rotation uniforme autour d'un axe vertical OZ avec une vitesse angulaire de rotation ω.

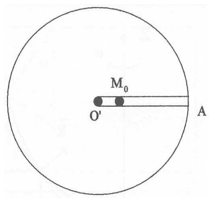
Dans le repère tournant, l'équation $Z = f(X)$ de la gouttière est telle que lorsque l'on pose, sans vitesse initiale, une masse ponctuelle $\mathrm{M}(m)$ en n'importe quel point de cette gouttière, la masse reste en équilibre. On néglige les frottements entre la gouttière et la masse.



1. Traduire l'équilibre du point $\mathrm{M}(m)$ dans le référentiel lié à la gouttière.
2. Relier géométriquement les composantes R_X et R_Z de la réaction de la gouttière sur le point $\mathrm{M}(m)$ et $\dfrac{dZ}{dX}$.
3. En déduire l'équation $Z = f(X)$ de la gouttière.

14 : *Disque horizontal en rotation.(*)*

Dans un laboratoire, un disque plan **horizontal** de rayon R tourne autour de son axe vertical avec une vitesse angulaire constante $\omega = 2\ \mathrm{rad.s^{-1}}$. Au temps $t=0$, un point $\mathrm{M}(m)$, est abandonné en M_0, $\left(\mathrm{O'M}_0 = \dfrac{R}{4}\right)$, sans vitesse initiale par rapport au disque dans une rigole O'A liée au disque. Le mouvement de M dans la rigole se fait sans frottement.



1. Faire le bilan des forces exercées sur le point M dans le référentiel lié à la tige.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $r(t) = \mathrm{O'M}(t)$. La résoudre.
3. Déterminer le temps t_1 pour lequel M atteint le point A.
4. Tracer l'allure de la trajectoire de M dans le référentiel du laboratoire.

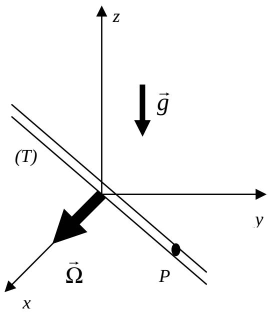
15 : *Gouttière circulaire en rotation.(***)*

On considère un anneau de masse m, mobile sans frottement sur un cercle **vertical** de centre O et de rayon R. Le cercle tourne autour de son diamètre vertical Oz à la vitesse angulaire ω constante.

1. Faire l'inventaire des forces appliquées à l'anneau $\mathrm{A}(m)$.
2. Déterminer en utilisant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz' de rotation de A, l'équation différentielle en $\theta(t)$ qui régit le mouvement de l'anneau par rapport au cercle.
3. Quelles sont les forces appliquées conservatives ? Lesquelles fournissent un travail à l'anneau dans le référentiel lié au cercle ?
4. Déterminer l'énergie potentielle de $\mathrm{A}(m)$ dans le référentiel lié au cercle en fonction de m, g, R, ω et θ.
5. Rechercher les positions d'équilibre et étudier leur stabilité.
6. En déduire une expression approchée de l'énergie potentielle, $E_P(\theta)$, de $\mathrm{A}(m)$ dans le référentiel lié au cercle au proche voisinage des positions d'équilibre stable.
7. Déterminer alors l'équation différentielle en $\theta(t)$ qui régit les petites oscillations de l'anneau autour de ses postions d'équilibre stable par rapport au cercle. Donner les expressions des pulsations propres des petites oscillations autour des positions d'équilibre stables.

16 : *Bille dans tube en rotation*.(**)

Une bille $\mathrm{P}(m)$, considérée ponctuelle, soumise à la pesanteur est susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube (T) cylindrique mince de longueur $2l$ et de centre O. Ce tube (T) tourne dans le plan vertical yOz autour de l'axe Ox à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega\,\vec{e}_x$. A l'instant t, le tube (T) fait avec l'axe Oy un angle $\theta = \omega t$.



On note $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ le rayon vecteur de la position de P dans (T) à l'instant t, $\dot{\vec{r}}$ et $\ddot{\vec{r}}$ les vecteurs vitesse et accélération dans (T).

Les grandeurs r_0 et v_0 caractérisent la position et la vitesse de la bille à $t=0$.

Les mouvements de la bille P ont lieu sans frottements dans le tube.

On pourra associer au point P la base mobile $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_x)$, $\vec{u}$ suivant $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{w}$ suivant la direction perpendiculaire à $\vec{u}$ orientée suivant les angles θ positifs et $\vec{e}_x = \vec{u}\wedge\vec{w}$. On note $\vec{R}$ la réaction du tube (T) et R sa norme.

1. Faire le bilan des forces qui agissent sur P dans le référentiel lié au tube (T).
2. Etablir l'équation différentielle en $r(t)$ du mouvement de P.
3. Intégrer cette équation pour les conditions initiales r_0 et v_0.
4. Décrire le mouvement pour les conditions initiales liées suivantes : r_0 et $v_0 = -r_0\omega + \dfrac{g}{2\omega}$. (nature du régime transitoire ? du régime permanent ?)
5. Etablir l'expression de $\vec{R}(t)$ en fonction de $m, g, \omega, \dot{r}$ et t.

Réponses et éléments de réponses :

1 : $v = \dfrac{V}{\tan\alpha}$. **2 :** $\Delta t = 5\,\text{min}$. **3 :** $\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}_0$; $\|\vec{g}\,'\| = 8{,}8\,\text{m.s}^{-2}$. **4 :** a. Chute libre avec $\vec{a}\,' = \vec{g} - \vec{a}_{O'}$.

5 : a. $\ddot{z}_1 + \dfrac{k}{m} z_1 = \dfrac{k}{m} l_{éq}$ avec $l_{éq} = l_0 + \dfrac{m(g + a_0)}{k}$. c. $\Delta l_{eq} = \dfrac{m}{k}\left(g + \dfrac{v^2}{2OO'}\right)$. $\Delta l_{eq} = 7{,}8\,\text{cm}$. d. $z_1(t) = l_{éq} - \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

6 : a. $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l}\sin\theta + \dfrac{a_0}{l}\cos\theta = 0$. b. $\tan\theta_e = \dfrac{-a_0}{g}$. c. Si $\theta = \theta_e + \alpha$, $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$ avec $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}\sqrt{1 + \dfrac{a_0^2}{g^2}}$.

7 : $\omega_{\min} = \sqrt{\dfrac{g}{\mu R}}$.

8 : b. $\ddot{r} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) r = \omega_0^2 l_0$. c. $r_{éq} = \dfrac{\omega_0^2 l_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$. d. Si $\omega < \omega_0$: $r(t) = r_{éq} + A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$,

Si $\omega > \omega_0$: $r(t) = r_{éq} + Ae^{\Omega' t} + Be^{-\Omega' t}$ avec $\Omega' = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$. e. $\vec{R}(t) = mg\vec{e}_z + 2m\dot{r}\omega\vec{e}_\theta$.

9 : 1. $I \equiv B_0$. 2. $IB_0 = \dfrac{Ha_e}{g} = \dfrac{Hv}{g\Delta t}$.

10 : 1. $\vec{v}(M)_{\Re'} = r_0\omega\big(\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\big)\vec{e}_{x'}$; $\vec{v}_e = r_0\omega\big(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\big)\vec{e}_{y'}$ $v(M)_{\Re} = r_0\omega\sqrt{2}$.

2. $\vec{a}(M)_{\Re'} = -r_0\omega^2\big(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\big)\vec{e}_{x'}$; $\vec{a}_e = -r_0\omega^2\big(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\big)\vec{e}_{x'}$; $\vec{a}_c = 2r_0\omega^2\big(\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\big)\vec{e}_{y'}$

$a(M)_{\Re} = 2r_0\omega^2\sqrt{2}$.

11 : 1. $\ddot{X} = a_0\cos\alpha - g\sin\alpha$. 2. $\tan\alpha \le \dfrac{a_0}{g}$; $\tan\alpha \le \dfrac{a_0 - \mu g}{g + \mu a_0}$.

12 :. $\omega > \omega_{\lim} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}}$.

13 : 2. $\tan\alpha = \dfrac{R_X}{R_Z} = \dfrac{dZ}{dX}$. 3. $Z = \dfrac{\omega^2}{2g} X^2$.

14 : 2. $r(t) = \dfrac{R}{4}\cosh(\omega t)$. 3. $t_1 = 1{,}0\,s$. 4. $r(\theta) = \dfrac{R}{4}\cosh(\theta)$.

15 : 2. $\ddot{\theta} + \left(\dfrac{g}{R} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$. 4. $E_P(\theta) = mgR(1 - \cos\theta) - \dfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta$.

5. $\theta_{eq1} = 0$ stable si $\omega < \sqrt{\dfrac{g}{R}}$ et instable sinon, $\theta_{eq2} = \pi$ instable, θ_{eq3} tel que $\cos\theta_{eq3} = \dfrac{g}{R\omega^2}$ si $\omega > \sqrt{\dfrac{g}{R}}$, stable.

6 et 7. $\theta_{eq1} = 0$: $E_P(\theta) = E_P(0) + \dfrac{1}{2} mR^2\left(\dfrac{g}{R} - \omega^2\right)\theta^2$, $\ddot{\theta} + \left(\dfrac{g}{R} - \omega^2\right)\theta = 0$, $\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R} - \omega^2}$.

θ_{eq3} : $E_P(\theta) = E_P(\theta_{éq3}) + \dfrac{1}{2} mR^2\left(\omega^2 - \dfrac{g^2}{R^2\omega^2}\right)(\theta - \theta_{éq3})^2$, $\ddot{\theta} + \left(\omega^2 - \dfrac{g^2}{R^2\omega^2}\right)(\theta - \theta_{éq3}) = 0$, $\Omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \dfrac{g^2}{R^2\omega^2}}$.

16 : 2. $\ddot{r} - \omega^2 r = -g\sin(\omega t)$. 3. $r(t) = \left(r_0 + \left(\dfrac{v_0}{\omega} - \dfrac{g}{2\omega^2}\right)\right)\dfrac{e^{\omega t}}{2} + \left(r_0 - \left(\dfrac{v_0}{\omega} - \dfrac{g}{2\omega^2}\right)\right)\dfrac{e^{-\omega t}}{2} + \dfrac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$.

4. $r(t) = r_0 e^{-\omega t} + \dfrac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$. 6. $\vec{R}(t) = \big(mg\cos(\omega t) + 2m\omega\dot{r}(t)\big)\vec{w}$.