

TD Méca 6 : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES ET CONSERVATIVES.

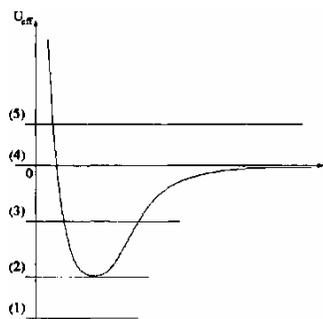
Applications directes du cours

On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$, $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6400 \text{ km}$.

- On considère un point matériel M soumis à une force unique, centrale :
 - Lorsque la trajectoire du point est un cercle, le mouvement est-il uniforme ?
 - Si on sait que la vitesse du point M s'annule en un point M_1 de la trajectoire, que peut-on dire de sa trajectoire ?

- Pour un champ newtonien, la courbe représentative de l'évolution de l'énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r)$ en fonction de r est :

- S'agit-il d'un champ de force attractif ou répulsif ?
- Préciser pour chacune des valeurs de l'énergie mécanique (numérotées de (1) à (5)), le caractère borné ou non du mouvement, la nature de l'état (lié ou de diffusion) ainsi que la nature de la trajectoire.



- Les distances de la Lune à la Terre à son apogée et à son périégée sont $r_A = 404000 \text{ km}$ et $r_P = 365000 \text{ km}$. En déduire le rapport des vitesses respectives $\frac{v_A}{v_P}$ de la Lune en ces points.

- La trajectoire de la Terre autour du Soleil est une ellipse de demi grand axe $a = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$.

- Déterminer la masse du Soleil.
- Saturne est 9,5 fois plus éloigné du Soleil que la Terre. Quelle est sa période de révolution ?

- Dans la bande dessinée « Objectif Lune » de Hergé, on peut lire ces mots des ingénieurs qui suivent la fusée transportant Tintin :
« Observatoire à Station Contrôle... La fusée est à présent à 3185 km de son point de départ. Elle vient d'atteindre sa vitesse de libération, soit $9,133 \text{ km.s}^{-1}$. Tout semble normal ».

Vérifier la cohérence de ces valeurs numériques. On donne $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ et $R_T = 6400 \text{ km}$.

- Une particule α (noyau d'hélium ${}^4_2\text{He}$) initialement très éloignée de la cible (supposée infiniment éloignée) est lancée avec une vitesse $V_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ vers un noyau d'or (${}^{197}_{79}\text{Au}$), la cible, que l'on supposera constamment immobile. La particule incidente subit une rétrodiffusion de 180° , c'est-à-dire qu'elle revient sur elle-même après interaction avec le noyau.

- Expliquer rapidement le phénomène.
- En déduire la vitesse de rétrodiffusion V' de la particule α (vitesse de la particule lorsqu'elle a rejoint son point de départ) et la distance minimale d'approche r_{min} du noyau d'or lors de l'interaction.

- Un satellite artificiel $M(m)$ est en orbite circulaire de rayon R autour du centre O de la Terre.

- Déterminer l'énergie mécanique du satellite en fonction de G, M_T, m et R .
- Retrouver sur cet exemple la troisième loi de Képler liant G, M_T, T et R .

- Vitesses cosmiques.

- Calculer la vitesse v_S nécessaire pour satelliser un corps sur une orbite circulaire au proche voisinage de la surface de la Terre. Cette vitesse est appelée *première vitesse cosmique*.
- Calculer la vitesse v_L minimale qu'il faut communiquer au satellite placé sur la Terre pour qu'il se libère de l'attraction gravitationnelle. Cette vitesse est appelée *seconde vitesse cosmique* ou vitesse de libération.

Exercices

9 : Satellite.(*)

Un satellite décrit une orbite circulaire à l'altitude h autour de la Terre.

- Exprimer la vitesse $V(h)$ du satellite évoluant sur l'orbite circulaire à l'altitude h autour de la Terre
- En déduire que les énergies potentielle, cinétique et mécanique du satellite sont telles que : $E_m = -E_c = \frac{1}{2}E_p$.
- Par suite de l'existence de frottement avec l'atmosphère, le satellite perd légèrement de l'altitude à chaque rotation ($|dh| \ll h$). On admet cependant que la trajectoire reste circulaire en première approximation.

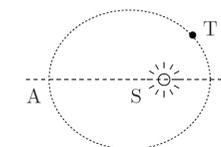
Trouver la relation liant la variation de vitesse dV à la variation d'altitude dh à chaque tour.

Commenter le résultat obtenu.

Données : $dh = -1 \text{ m}$; $h = 500 \text{ km}$.

10 : Mouvement orbital de la Terre.(*)

La Terre T décrit autour du Soleil S une orbite elliptique d'excentricité $e = 0,0167$, de demi-grand axe $a = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ et de période $T = 365,25$ jours solaires.



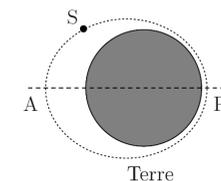
- Exprimer en fonction des données puis calculer le périhélie SP et l'aphélie SA de la trajectoire terrestre.
- En supposant que la trajectoire soit circulaire, exprimer la vitesse v de révolution, en fonction du rayon a et de la période T . Calculer v .

- Pour la trajectoire réelle elliptique, exprimer alors les vitesses v_A et v_P de passage respectivement à l'aphélie et au périhélie, en fonction de v et de e . Faire les applications numériques.

11 : Satellite artificiel terrestre.(*)

Un satellite terrestre S est à son périégée à l'altitude $h = 350 \text{ km}$. Sa période de révolution est $T = 5843 \text{ s}$.

Données : $R_T = 6400 \text{ km}$ le rayon terrestre, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ la constante universelle de gravitation, $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ la masse de la Terre.



- Exprimer puis calculer le demi-grand axe a de la trajectoire du satellite.
- Exprimer en fonction de R_T, h et a l'excentricité e de la trajectoire du satellite. La calculer.
- Déterminer l'altitude H du satellite à son apogée.

12 : Planète.(*) (D'après Polytechnique)

On considère une planète en interaction gravitationnelle avec son étoile.

- Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon a et de période T , déterminer le rapport $C = \frac{T^2}{a^3}$.

Ce résultat reste valable si a est le demi grand axe d'un mouvement elliptique.

- Quel est le rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg dont on suppose les caractéristiques physiques identiques à celles du Soleil ? On exprimera le résultat en unités astronomiques (par définition, l'unité astronomique UA est égale au demi grand axe de l'orbite terrestre).

13 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène. (*)

On considère l'interaction électrostatique entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène. On se place dans le modèle de Bohr où l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r autour du proton supposé fixe et centré en O.

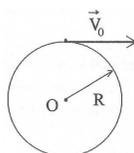
L'hypothèse de Bohr consiste à poser $\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi}$, n étant un entier, h la constante de Planck et \vec{L}_O le moment cinétique de l'électron calculé en O.

1. Montrer que l'énergie mécanique E de l'électron peut s'écrire $E = \frac{E_1}{n^2}$ et exprimer E_1 .
2. Calculer E_1 en eV.

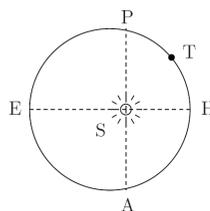
14 : Tir à la surface de la Terre. ()**

On tire horizontalement un projectile à la surface de la Terre avec une vitesse V_0 telle que $V_0^2 = \alpha \frac{GM_T}{R}$ ($1 \leq \alpha \leq 2$), G désignant la constante de gravitation universelle, M_T la masse de la Terre et R son rayon.

1. Déterminer l'énergie mécanique puis l'énergie potentielle efficace (ou effective) du projectile en fonction de la distance r au centre de la Terre ($r = R + h$).
2. Tracer l'allure de ces énergies en fonction de la distance r au centre de la Terre.
3. En déduire l'expression des altitudes maximale et minimale du projectile.
4. Préciser la nature de la trajectoire dans les cas $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$ et $\alpha = 2$.

**15 : Les quatre saisons. (*)**

La Terre décrit autour du Soleil une ellipse de faible excentricité e . Sur le dessin ci-dessous, on a représenté les points H, P, E et A de la trajectoire correspondant respectivement aux débuts de l'hiver, du printemps, de l'été et de l'automne – il se trouve que c'est en hiver que la Terre est la plus proche du Soleil. Elle met $t_H = 89,4$ jours solaires pour décrire l'arc HP – c'est la durée de l'hiver dans l'hémisphère nord – et $t_P = 93,2$ jours solaires pour décrire l'arc PE – c'est la durée du printemps dans l'hémisphère nord. On admet que, l'ellipse étant faiblement excentrique, l'aire S_H du secteur SHP de l'ellipse vaut $\frac{ab}{4}(\pi - 4e)$, a et b désignant les demi-axes de l'ellipse. On rappelle que l'aire totale de l'ellipse est $S = \pi ab$.



1. En utilisant la loi des aires, donner la relation entre la durée t_H , la durée de l'année T et les aires S_H et S .
2. En déduire l'expression de l'excentricité e en fonction de t_H et t_P . Calculer e .

16 : De la Terre à Mars (*)

On suppose que les orbites de Mars et de la Terre sont des cercles coplanaires de rayons respectifs R_1 et R_0 , tels que $R_1 = nR_0$ avec $n = 1,524$. On souhaite transférer un engin spatial depuis l'orbite terrestre vers l'orbite martienne. On néglige lors de ce transfert les actions gravitationnelles des planètes pour ne retenir que celle du Soleil. L'orbite de transfert est une demi-ellipse se raccordant tangentiellement aux points P et A des orbites respectivement terrestre et martienne, dont le Soleil occupe l'un des foyers. On note T_0 la durée d'une année terrestre.

1. Représenter sur un dessin les orbites de la Terre, de Mars et l'orbite de transfert.
2. Exprimer en fonction des données le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.
3. Établir l'expression de la durée d en année terrestres d'un transfert entre la Terre et Mars.

17 : Changement d'orbite d'un satellite : demi-ellipse de transfert. ()**

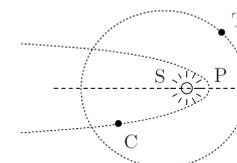
Le mouvement d'un satellite artificiel M (m) de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique \mathfrak{R}_G supposé galiléen. Le satellite est en orbite circulaire (B) rasante de rayon R_T autour du centre O de la Terre. On veut le transférer sur l'orbite géostationnaire (G) de rayon R_G .

Pour effectuer ce transfert, une variation brusque de vitesse est communiquée au satellite (en un point P de sa trajectoire) par éjection de gaz dans le sens opposé de la vitesse du satellite. A son arrivée en A, on communique au satellite le supplément de vitesse qui lui permet de se stabiliser sur l'orbite géostationnaire.

1. Faire un schéma représentant les deux orbites circulaires et la demi-ellipse de l'orbite de transfert.
2. Calculer la vitesse v_B du satellite sur l'orbite (B).
3. Calculer le rayon R_G de l'orbite (G) et la vitesse v_G du satellite sur l'orbite (G).
4. Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite (B), sur la demi-ellipse de transfert puis sur l'orbite (G).
5. En déduire l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour qu'il passe en P de l'orbite (B) à la demi-ellipse de transfert ainsi que l'énergie qu'il faut fournir au satellite pour qu'il passe en A de la demi-ellipse de transfert à l'orbite (G).
6. Quelle est la durée de ce transfert ?

18 : Comète de Halley. (*)

La comète de HALLEY a une période $T = 76,03$ années terrestres et sa distance minimale au Soleil est $SP = 0,59 a_0$ où a_0 est le demi-grand axe de l'orbite terrestre autour du Soleil. On note T_0 la durée de l'année terrestre.



1. Exprimer le demi-grand axe a de la trajectoire de la comète en fonction de a_0 , T_0 et T . Exprimer numériquement a en fonction de a_0 .

2. Calculer l'excentricité e de la trajectoire de la comète.
3. Exprimer en fonction de a_0 la distance maximale SA de la comète au Soleil.

19 : Comète de 1843. ()**

En 1843, une comète est passée extrêmement près du Soleil, de masse M_S : sa distance au périhélie était $d = 6,1 \cdot 10^{-3} a_0$ où a_0 est le rayon de l'orbite terrestre. Des mesures précises ont montré que l'excentricité de la comète était $e = 1 - x$ avec $x = 9,4 \cdot 10^{-5}$.

Donnée : $u = 30 \text{ km.s}^{-1}$ vitesse de révolution de la Terre autour du Soleil.

1. Exprimer le produit GM_S en fonction de u et a_0 .
2. En considérant que la trajectoire de la comète est quasi-parabolique, calculer sa vitesse de passage v_P au périhélie.
3. Exprimer le demi-grand axe a de la trajectoire de la comète, en fonction de d et x . Calculer a en fonction de a_0 .
4. En déduire la vitesse v_A de passage à l'aphélie en fonction de v_P et x . Faire l'application numérique.
5. En quelle année cette comète reviendra-t-elle dans le système solaire ?

Réponses et éléments de réponses :

1 : 1. oui. 2. trajectoire rectiligne. 3 : $\frac{v_A}{v_P} = \frac{r_P}{r_A}$; $\frac{v_A}{v_P} = 0,903$. 4 : $1. M_S \approx 2.10^{30} \text{ kg}$. $2. T_S \approx 10700 \text{ jours}$.

5 : $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T + h}}$; $v_\ell = 9,15 \text{ km.s}^{-1}$. 6 : $2. V' = V_0 = 10^7 \text{ m.s}^{-1}$; $r_{\min} = \frac{q_1 q_2}{2\pi \epsilon_0 m V_0^2} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ m}$.

7 : 1. $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{R}$. 2. $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$. $E_m = -\frac{1}{2} \frac{GM_T m}{a}$; $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$.

8 : 1. $v_S = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$; $v_S \approx 7,9 \text{ km.s}^{-1}$. 2. $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T}$; $v_\ell \approx 11,2 \text{ km.s}^{-1}$.

TD Méca 6 : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES ET CONSERVATIVES.

$$9 : 2. dV = -\frac{\sqrt{GM_T}}{2(R_T + h)^{3/2}} dh ; dV = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}.$$

$$10 : 1. SP = a(1-e) : SP = 1,475 \cdot 10^{11} \text{ m} ; SA = a(1+e) : SA = 1,525 \cdot 10^{11} \text{ m} . 2. v = \frac{2\pi a}{T} : v = 29,87 \text{ km.s}^{-1} .$$

$$3. v_p = \frac{v}{(1-e)} : v_p = 30,37 \text{ km.s}^{-1} ; v_A = \frac{v}{(1+e)} : v_A = 29,37 \text{ km.s}^{-1} .$$

$$11 : 1. : a = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} : a = 7,02 \cdot 10^6 \text{ m} . 2. e = 1 - \frac{R_T + h}{a} : e = 0,0386 . 3. H = \frac{1+e}{1-e} (R_T + h) - R_T : H = 891 \text{ km} .$$

$$12 : 1. \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} . 2. a = a_T \left(\frac{T}{T_T} \right)^{2/3} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ UA} .$$

$$13 : 2. E_1 = \frac{-me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13,5 \text{ eV} .$$

$$14 : 3. h_{\min} = 0 ; h_{\max} = 2 \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} R .$$

$$15 : 1. \frac{S_H}{t_H} = \frac{S}{T} . 2. e = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi t_H}{2(t_H + t_p)} : e = 0,0163 .$$

$$16 : 1. a = \frac{1+n}{2} R_0 : a = 8,08 \cdot 10^3 \text{ km} . 2. d = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \frac{T_{\text{Terre}}}{2} \sqrt{\frac{a^3}{R_0^3}} = \frac{T_{\text{Terre}}}{2} \sqrt{\frac{(1+n)^3}{8}} : d = 0,709 \text{ années terrestres} .$$

$$17 : 2. v_B = \sqrt{g_0 R_T} . 3. R_G = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} , v_G = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_T}{T}} . 4. E_{m,B} = \frac{-GM_T m}{2R_T} , E_{m,ell} = \frac{-GM_T m}{R_T + R_G} , E_{m,G} = \frac{-GM_T m}{2R_G} .$$

$$5. \Delta E_m(P) = \frac{GM_T m (R_G - R_T)}{2R_T (R_T + R_G)} \text{ et } \Delta E_m(A) = \frac{GM_T m (R_G - R_T)}{2R_G (R_T + R_G)} . 6. \Delta t = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (R_T + R_G)^3}{8GM_T}} .$$

$$18 : 1. a = a_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} : a = 17,9 a_0 = 17,9 \text{ UA} . 2. e = 1 - \frac{SP}{a} : e = 0,967 . 3. SA = 2a - SP : SA = 35,3 a_0 = 35,3 \text{ UA} .$$

$$19 : 1. GM_S = u^2 a_0 . 2. v_p = \sqrt{\frac{2GM_S}{d}} = u \sqrt{\frac{2a_0}{d}} : v_p = 543 \text{ km.s}^{-1} . 3. a = \frac{d}{x} : a = 64,9 a_0 = 64,9 \text{ UA} .$$

$$4. v_A = \frac{x}{2-x} v_p : v_A = 51,0 \text{ m.s}^{-1} . 5. T = T_{\text{Terre}} \sqrt{\frac{a^3}{a_0^3}} = T_{\text{Terre}} \sqrt{\frac{d^3}{x^3 a_0^3}} : T = 523 \text{ années terrestres} .$$

TD Méca 6 : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES ET CONSERVATIVES.

$$9 : 2. dV = -\frac{\sqrt{GM_T}}{2(R_T + h)^{3/2}} dh ; dV = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} .$$

$$10 : 1. SP = a(1-e) : SP = 1,475 \cdot 10^{11} \text{ m} ; SA = a(1+e) : SA = 1,525 \cdot 10^{11} \text{ m} . 2. v = \frac{2\pi a}{T} : v = 29,87 \text{ km.s}^{-1} .$$

$$3. v_p = \frac{v}{(1-e)} : v_p = 30,37 \text{ km.s}^{-1} ; v_A = \frac{v}{(1+e)} : v_A = 29,37 \text{ km.s}^{-1} .$$

$$11 : 1. : a = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} : a = 7,02 \cdot 10^6 \text{ m} . 2. e = 1 - \frac{R_T + h}{a} : e = 0,0386 . 3. H = \frac{1+e}{1-e} (R_T + h) - R_T : H = 891 \text{ km} .$$

$$12 : 1. \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} . 2. a = a_T \left(\frac{T}{T_T} \right)^{2/3} = 4,9 \cdot 10^{-2} \text{ UA} .$$

$$13 : 2. E_1 = \frac{-me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} = -13,5 \text{ eV} .$$

$$14 : 3. h_{\min} = 0 ; h_{\max} = 2 \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha} R .$$

$$15 : 1. \frac{S_H}{t_H} = \frac{S}{T} . 2. e = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi t_H}{2(t_H + t_p)} : e = 0,0163 .$$

$$16 : 1. a = \frac{1+n}{2} R_0 : a = 8,08 \cdot 10^3 \text{ km} . 2. d = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \frac{T_{\text{Terre}}}{2} \sqrt{\frac{a^3}{R_0^3}} = \frac{T_{\text{Terre}}}{2} \sqrt{\frac{(1+n)^3}{8}} : d = 0,709 \text{ années terrestres} .$$

$$17 : 2. v_B = \sqrt{g_0 R_T} . 3. R_G = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} , v_G = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM_T}{T}} . 4. E_{m,B} = \frac{-GM_T m}{2R_T} , E_{m,ell} = \frac{-GM_T m}{R_T + R_G} , E_{m,G} = \frac{-GM_T m}{2R_G} .$$

$$5. \Delta E_m(P) = \frac{GM_T m (R_G - R_T)}{2R_T (R_T + R_G)} \text{ et } \Delta E_m(A) = \frac{GM_T m (R_G - R_T)}{2R_G (R_T + R_G)} . 6. \Delta t = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \sqrt{\frac{\pi^2 a^3}{GM_T}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (R_T + R_G)^3}{8GM_T}} .$$

$$18 : 1. a = a_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} : a = 17,9 a_0 = 17,9 \text{ UA} . 2. e = 1 - \frac{SP}{a} : e = 0,967 . 3. SA = 2a - SP : SA = 35,3 a_0 = 35,3 \text{ UA} .$$

$$19 : 1. GM_S = u^2 a_0 . 2. v_p = \sqrt{\frac{2GM_S}{d}} = u \sqrt{\frac{2a_0}{d}} : v_p = 543 \text{ km.s}^{-1} . 3. a = \frac{d}{x} : a = 64,9 a_0 = 64,9 \text{ UA} .$$

$$4. v_A = \frac{x}{2-x} v_p : v_A = 51,0 \text{ m.s}^{-1} . 5. T = T_{\text{Terre}} \sqrt{\frac{a^3}{a_0^3}} = T_{\text{Terre}} \sqrt{\frac{d^3}{x^3 a_0^3}} : T = 523 \text{ années terrestres} .$$