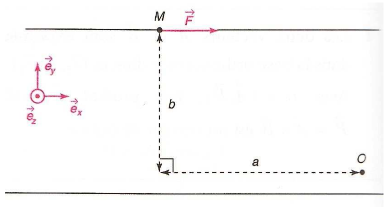
TD Méca5 : THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

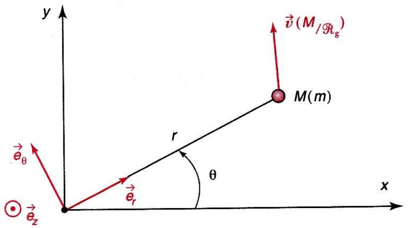
Applications directes du cours

1. a. Exprimer le moment de la force $\vec{F}$ d'intensité $F=\|\vec{F}\|$ par rapport au point O, par rapport à l'axe $(O,-\vec{e}_z)$ et enfin par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_z)$.
   b. Si la force $\vec{F}$ se déplace sur sa droite d'action, son moment par rapport à l'axe orienté est-il modifié ?

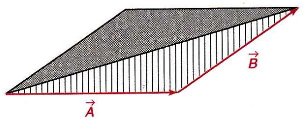


2. « Si un point matériel M_1 exerce sur un autre point matériel M_2 une force $\vec{F}_{1\to 2}$, alors le point matériel M_2 exerce sur le point matériel M_1 la force $\vec{F}_{2\to 1}=-\vec{F}_{1\to 2}$ ». Cette équation, à elle seule, traduit-elle le principe des actions réciproques ?

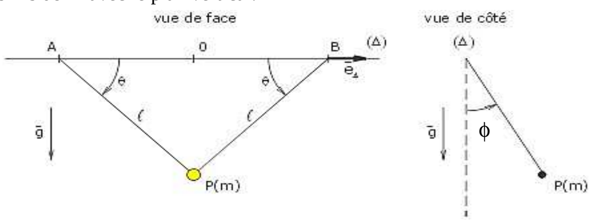
3. Un point $M(m)$ est en mouvement dans le plan xOy. Déterminer en coordonnées polaires son moment cinétique en O, son moment cinétique par rapport à l'axe $(O,-\vec{e}_z)$, son moment cinétique en par rapport à l'axe $(O,\vec{e}_z)$.



4. Déterminer l'aire hachurée en fonction des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

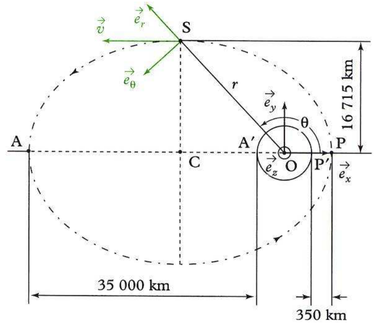


5. Une masse m ponctuelle est attachée par deux fils en deux points A et B d'un axe horizontal (Δ). Elle se trouve dans un champ de pesanteur uniforme dont l'accélération est g. Chaque brin de fil, de longueur ℓ, fait un angle θ constant avec l'axe (Δ). La position de la masse m est repérée par l'angle ϕ que fait le plan des deux brins de fil avec le plan vertical.



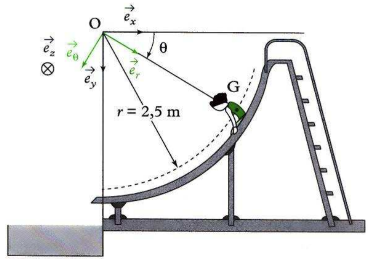
   a. Calculer le moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) du point $P(m)$.
   b. Calculer les moments par rapport à l'axe (Δ) de toutes les forces appliquées à la masse m.
   c. En déduire l'équation différentielle du mouvement du pendule satisfaite par $\phi(t)$.

6. Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse $m=1$ tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la Terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel d'étude $\Re_g$ est supposé galiléen. A l'instant représenté (point S), la vitesse du satellite dans ce référentiel est $v=14650\text{km.h}^{-1}$.
   Donnée : rayon de la Terre $R_T=6400\text{km}$.



   a. Calculer le moment cinétique du satellite en O dans $\Re_g$.
   b. A l'aide du théorème du moment cinétique, donner la valeur de la vitesse du satellite :
      a. à son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre).
      b. à son périgée P (point de la trajectoire le plus près de la Terre).

7. Un enfant assimilé à un point matériel G de masse $m=40\text{kg}$ glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r=2{,}5\text{m}$ depuis la position $\theta=\theta_0=15°$ où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position $\theta=90°$ où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements. On suppose le référentiel lié à la Terre galiléen.

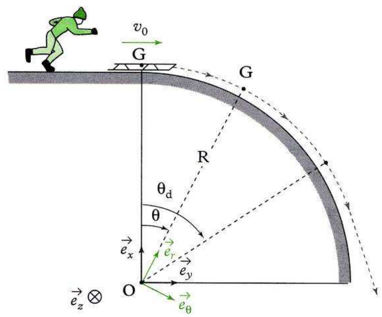


   a. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique.
   b. En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de sa position repérée par θ.
   c. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant. Commenter.

Applications directes du cours

8 : *La luge.(*)*

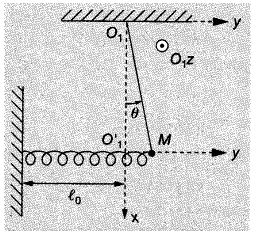
Une luge assimilée à un point matériel G de masse m arrive au niveau d'un profil circulaire avec une vitesse horizontale v_0. Tant que la luge suit ce profil, elle décrit une trajectoire circulaire de rayon $R=5\text{m}$ et est repérée par l'angle θ. On néglige tous les frottements. On suppose le référentiel lié à la Terre galiléen.



1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.
2. En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de la position repérée par θ et v_0.
3. Déterminer l'expression de la réaction du sol.
4. Déterminer l'angle limite au-delà duquel la luge quitte le profil circulaire (en fonction de v_0).
5. Montrer qu'il existe une valeur limite de v_0 au-delà de laquelle la luge ne suit pas du tout le profil circulaire.

9 : *Pendules reliés par un ressort.*

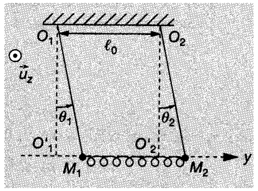
1. Oscillations d'un pendule *(**)*



Un point matériel $M(m)$ est relié à un fil inextensible de longueur $L = O_1M$ et de masse négligeable et à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l_0. Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O_1'.
On envisage des petites oscillations quasi horizontales du point M, telles que $O_1'M \ll L$.
La position de M est repérée par l'angle θ entre le fil et la verticale.

a. Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.
b. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

2. Couplage entre deux pendules *(***)*



Deux pendules simples identiques, de masse m, et de longueur $L = O_1M_1 = O_2M_2$, sont reliés par un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide $l_0 = O_1'O_2' = O_1O_2$.
Les points M_1 et M_2 sont au repos dans les positions O_1' et O_2' lorsque les deux fils sont verticaux.
On considère des petites oscillations quasi horizontales des points M_1 et M_2, telles que $O_1'M_1 \ll L$ et $O_2'M_2 \ll L$.
Les positions de M_1 et M_2 sont repérées par les angles θ_1 et θ_2 entre les fils et la verticale.

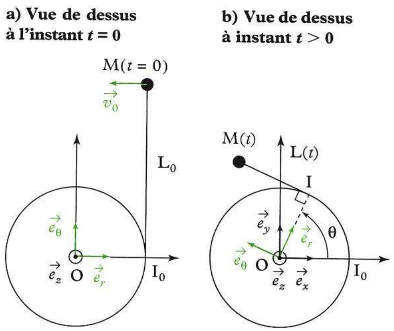
a. Déterminer les équations différentielles couplées satisfaites par θ_1 et θ_2, à partir du théorème du moment cinétique.

On posera : $\omega_0{}^2 = \dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{m}$ et $\Omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$.

b. On note $S = \theta_1 + \theta_2$ et $D = \theta_1 - \theta_2$.
Quelles sont les équations différentielles vérifiées par S et D ?
En déduire θ_1 et θ_2 en faisant intervenir des constantes d'intégration. Comment déterminer ces constantes ?

10 : *Au bout du fil.(**)*

Un cylindre d'axe de révolution Oz et de rayon R, repose sur un plan horizontal et est fixe par rapport au référentiel galiléen d'étude.
On attache une extrémité d'un fil inextensible et de masse négligeable à la base du cylindre, en I_0. L'autre extrémité du fil est fixée à une particule $M(m)$ astreinte à glisser sans frottement sur le plan horizontal.
La longueur du fil non enroulée sur le cylindre à un instant t est $\mathrm{L}(t)$.
A l'instant $t = 0$, on communique à M une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale, perpendiculaire à $\mathrm{I_0M} = \mathrm{L}_0$.
On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement.



1. Relier $\mathrm{L}_0, \mathrm{L}, R$ et θ.
2. Montrer que $\vec{v}(\mathrm{M}) = -(\mathrm{L}_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r$.
3. Montrer que la vitesse (en norme) du point M reste constante au cours du temps.
4. Déduire des questions précédentes que $\theta(t) = \dfrac{\mathrm{L}_0}{R} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{L}_0^2 - 2Rv_0t}}{R}$.
5. Déterminer la tension T du fil en fonction de m, L_0, R, v_0 et t.
6. Expliquer pourquoi le fil cassera avant de s'enrouler complètement sur le cylindre.

Réponses ou éléments de réponses :

1 : a. $\vec{M}_O(\vec{F}) = -bF\,\vec{e}_z$, $M_{(O,-\vec{e}_z)}(\vec{F}) = bF$, $M_{(O,\vec{e}_z)}(\vec{F}) = -bF$. b. non.

3 : $\vec{L}_O(M)_{\Re} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$, $L_{(O,-\vec{e}_z)}(M)_{\Re} = -mr^2\dot{\theta}$, $L_{(O,\vec{e}_z)}(M)_{\Re} = mr^2\dot{\theta}$.

4 : $Aire = \dfrac{1}{2}\left\|\vec{A} \wedge \vec{B}\right\|$.

5 : a. $L_\Delta = ml^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}$. b. $M_\Delta(\vec{P}) = -mgl\sin\theta\sin\phi$; $M_\Delta(\vec{T}_\mathrm{A}) = M_\Delta(\vec{T}_\mathrm{B}) = 0$ .c. $\ddot{\phi} + \dfrac{g}{l\sin\theta}\sin\phi = 0$.

6 : a. $\vec{L}_\mathrm{o} = m\left\|\overrightarrow{CS}\right\|v\vec{e}_z$. b.i. $v_\mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{SC}}{\mathrm{R_T + AA'}}v = 5915\ \mathrm{km.h^{-1}}$. b.ii. $v_\mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{SC}}{\mathrm{R_T + PP'}}v = 3{,}628.10^4\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

7 : a. $\ddot{\theta} - \dfrac{g}{r}\cos\theta = 0$. b. $v^2 = 2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)$. 3. $v_{\max} = 21{,}7\ \mathrm{km.h^{-1}}$.

8 : 1. $\ddot{\theta} = \dfrac{g}{r}\sin\theta$. 2. $\dot{\theta}^2 = \dfrac{v_0{}^2}{R^2} + \dfrac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$. 3. $\vec{R}_\mathrm{N} = m\left[g(3\cos\theta - 2) - \dfrac{v_0{}^2}{R}\right]\vec{e}_r$. 4. $\cos\theta_{\lim} = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{v_0^2}{gR}\right)$. 5. $v_{0\max}^2 = gR$.

9 : 1.a. $\ddot{\theta} + \left(\dfrac{g}{L} + \dfrac{k}{m}\right)\theta = 0$. b. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL}{mg + kL}}$. 2.a. $\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \Omega_0^2\theta_2$. b. $\ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = \Omega_0^2\theta_1$.

2. $\ddot{S} + (\omega_0^2 - \Omega_0^2)S = 0$; $\ddot{D} + (\omega_0^2 + \Omega_0^2)D = 0$. $\theta_1 = \dfrac{1}{2}\left[A_\mathrm{S}\cos(\omega_\mathrm{S}t + \varphi_\mathrm{S}) + A_\mathrm{D}\cos(\omega_\mathrm{D}t + \varphi_\mathrm{D})\right]$;

$\theta_2 = \dfrac{1}{2}\left[A_\mathrm{S}\cos(\omega_\mathrm{S}t + \varphi_\mathrm{S}) - A_\mathrm{D}\cos(\omega_\mathrm{D}t + \varphi_\mathrm{D})\right]$ avec $\omega_\mathrm{S} = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega_0^2} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ et $\omega_\mathrm{D} = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_0^2}$.

10 : 1. $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L} + R\theta$. 5. $T = \dfrac{mv_0^2}{\sqrt{\mathrm{L}_0^2 - 2Rv_ot}}$.