TD Méca3 : ENERGIE EN MECANIQUE.

Applications directes du cours

Calculs de travaux :

1. Calculer le travail fourni par une force uniforme $\vec{F}$ entre deux points M_1 et M_2 en fonction de $\vec{F}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$. Conclusion ?
2. On considère un point matériel $M(m)$ qui se déplace sur un support horizontal entre deux points M_1 et M_2. Exprimer le travail fourni par la force de frottement solide $\vec{R}_T$ au cours de ce déplacement en fonction du coefficient de frottement dynamique f_d, de la masse m du point matériel, de l'intensité g du champ de pesanteur, et de la longueur L_{12} du trajet suivi entre M_1 et M_2. Conclusion ?
3. On considère un point matériel M lié à un ressort (k,ℓ_0) qui se déplace sur un support horizontal entre deux points $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$. Exprimer le travail fourni à M par la tension du ressort au cours de ce déplacement. Conclusion ?

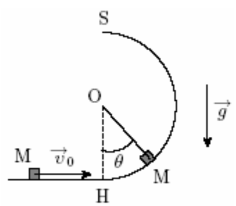
Puissance et énergie :

4. Calculer l'intensité F de la force de propulsive d'un véhicule dont le moteur a une puissance de $P = 3\text{kW}$ et qui se déplace de manière rectiligne uniforme à la vitesse de 80km.h^{-1}. Quelle est l'intensité f de la force de frottement exercée sur le véhicule.
5. Calculer le coût de fonctionnement en euros d'un appareil électroménager d'une puissance $P = 3\text{kW}$ quand on le fait fonctionner pendant un quart d'heure. (1kW.h coûte 0,15 euros).

Théorèmes de l'énergie cinétique :

6. On considère un point matériel M qui glisse sur un plan incliné d'un angle α entre deux points A et B, d'altitudes respectives z_A et $z_B > z_A$. On note v_A la vitesse de M en A et v_B celle de M en B.
   a. Exprimer la vitesse v_B en fonction de v_A, de l'intensité g de la pesanteur, de l'angle α, du coefficient de frottement dynamique f_d et des altitudes z_A et z_B.
   b. Si le point matériel possède la vitesse v_0 en A, quelle altitude maximale z_{max} atteindra-t-il sur le plan incliné ?
7. Une voiture roulant à la vitesse $v_1 = 50\text{km.h}^{-1}$ sur une route plane horizontale a une distance d'arrêt $d_1 = 40\text{m}$. En supposant que la force de freinage est constante en intensité, déterminer la distance d_2 de freinage pour une vitesse initiale $v_2 = 100\text{km.h}^{-1}$.
8. Pendule simple :
   a. Par le théorème de la puissance cinétique, établir l'équation du mouvement d'un pendule simple.
   b. Que devient cette équation différentielle aux petits angles d'oscillation ? Débuter la résolution.

9. Une petite voiture, assimilable à un point matériel M de masse m est lancée avec une vitesse v_0 sur une piste horizontale plane prolongée par un demi-cercle vertical de rayon R. La voiture glisse sans frottement sur le support qu'elle est susceptible de quitter (la liaison n'est pas bilatérale). Sa position à l'intérieur du demi-cercle est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé par le rayon OM avec la verticale descendante (OH).
   a. Comment varie la vitesse de la voiture jusqu'au passage au point H ?
   b. Déterminer l'expression de la norme v de la vitesse de la voiture lorsqu'elle est située dans la piste semi-circulaire à la position repérée par l'angle $\theta(t)$, en fonction de v_0, g, R et θ.
   c. En déduire (utiliser aussi le principe fondamental de la dynamique) l'intensité N de l'action de contact exercée par la piste semi-circulaire sur la voiture, en fonction de m, v_0, g, R et θ.
   d. A quelle condition sur la vitesse de lancement v_0 la voiture atteindra-t-elle le sommet S de la piste sans que le contact avec celle-ci soit rompu ?



Identification des forces conservatives, calculs de travaux dans le cas de forces conservatives :

10. Vérifier que le poids est une force conservative.
    a. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur dans le cas où l'axe Oz est ascendant.
    b. Comment est modifié ce résultat si l'axe Oz est vertical descendant ?
    c. Exprimer le travail du poids entre deux points $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ en fonction de m, z_1, z_2, et de l'intensité g de la pesanteur si l'axe Oz est vertical ascendant.
11. Vérifier que la force d'interaction gravitationnelle entre deux points matériels $M(m)$ et $M'(m')$ distants de r est une force conservative.
    a. En déduire l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle entre ces deux points.
    b. On considère un point matériel $M(m)$, qui se déplace entre deux positions M_1 et M_2 distantes de $M'(m')$ respectivement de r_1 et r_2. Exprimer le travail fourni au point $M(m)$ par la force d'interaction gravitationnelle entre les deux positions M_1 et M_2.
12. On considère un point matériel M, lié à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On suppose que le mouvement se fait suivant un axe Ox quelconque (pas forcément horizontal).
    a. Exprimer le travail élémentaire fourni par la tension du ressort au point matériel M en fonction de k, de la variable $X = \ell - \ell_0$, où ℓ représente la longueur du ressort et de dX. La force de rappel élastique est-elle une force conservative ?
    b. En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de k et X puis en fonction de k, ℓ et ℓ_0.
    c. Exprimer enfin le travail fourni au point M par la tension du ressort entre deux positions M_1 et M_2, correspondant à des longueurs respectives du ressort ℓ_1 et ℓ_2, en fonction de k, ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2.
13. Une particule P, supposée ponctuelle, située en un point A de l'espace, repéré dans un référentiel galiléen par $\overrightarrow{OA} = r\,\vec{e}_r$ ($\vec{e}_r$ étant le vecteur unitaire des coordonnées sphériques), est soumise à deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ définies par $\vec{F}_1 = -K_1\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}_2 = \dfrac{K_2}{r^2}\vec{e}_r$ où K_1 et K_2 sont deux constantes positives. On néglige les forces de pesanteur et on se place dans le référentiel galiléen.
    a. Exprimer la force résultante $\vec{F}$ que subit P en fonction de r et $\vec{e}_r$. Déterminer la position d'équilibre r_0 de P.
    b. Montrer que $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $V(r)$. La déterminer sachant que $V(r_0) = \dfrac{3}{2}\left(K_1K_2^2\right)^{\frac{1}{3}}$.
    c. Quel est le travail de cette force lors d'un déplacement de $M_1(r_1)$ à $M_2(r_2)$?

Problèmes à un seul degré de liberté, positions d'équilibre :

14. On considère un point matériel M en mouvement à un degré de liberté (noté x ici), soumis uniquement à des forces conservatives de résultante $\vec{F}_C(x)$ dérivant de l'énergie potentielle $E_P(x)$.
    a. Exprimer les différentes composantes de la force $\vec{F}_C(x)$ puis traduire la condition d'équilibre.
    b. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de $E_P(x)$ au voisinage de x_e correspondant à une position d'équilibre. Introduire la constante $k = \left(\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e}$.
    c. En déduire une expression approchée (à l'ordre 1) de la force appliquée au point M en fonction de k, x et x_e si M se trouve à proximité de la position d'équilibre.
    d. Envisager enfin un déplacement du point M à partir de la position d'équilibre $(x - x_e) > 0$ et discuter la stabilité de la position d'équilibre en fonction du signe de $k = \left(\dfrac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e}$.
15. On considère un pendule simple constitué par un point matériel $M(m)$ suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ. Quels sont les degrés de liberté ?
    a. Exprimer puis tracer l'allure de l'énergie potentielle $E_P(\theta)$ du système.
    b. Déterminer analytiquement les différentes positions d'équilibre, en étudier la stabilité. Le vérifier sur le graphe.

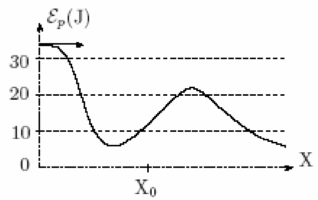
16. **Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable** :
   a. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de $E_P(x)$ au voisinage de x_e correspondant à une position d'équilibre **stable**. Introduire la constante $k = \left(\frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e} > 0$.
   b. En déduire une expression approchée (à l'ordre 1) de la force appliquée au point M en fonction de k, x et x_e si M se trouve à proximité de la position d'équilibre.
   c. En déduire finalement l'équation différentielle du mouvement de M au voisinage d'une position d'équilibre stable. Conclure sur la nature du mouvement.

Energie mécanique, équation du mouvement et caractère borné ou non d'un mouvement :

17. On considère un pendule simple constitué par un point matériel $M(m)$ suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ.
   a. Exprimer l'énergie potentielle $E_P(M)$ du système, son énergie cinétique $E_C(M)$ puis son énergie mécanique $E_M(M)$.
   b. Que dire de l'énergie mécanique de ce système ?
   c. En déduire l'intégrale première du mouvement du pendule simple puis son équation différentielle.
   d. A partir du graphe $E_P(\theta)$, discuter selon la valeur de l'énergie mécanique communiquée initialement au point matériel $M(m)$ la nature (éventuellement les bornes) du mouvement.

18. On considère un point matériel $M(m)$ suspendu à un ressort (k, ℓ_0) fixé en O. Le mouvement a lieu selon la verticale. L'axe Oz est choisi vertical descendant.
   a. Exprimer l'énergie potentielle $E_P(z)$ du système. Tracer l'allure $E_P(z)$ et en déduire les différentes positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.
   b. Exprimer ensuite l'énergie cinétique $E_C(M)$ et l'énergie mécanique $E_M(M)$ du point $M(m)$.
   c. Que dire de l'énergie mécanique de ce système ?
   d. En déduire l'intégrale première du mouvement puis l'équation différentielle du mouvement.
   e. A partir du graphe $E_P(z)$, discuter selon la valeur de l'énergie mécanique communiquée initialement au point matériel M les bornes du mouvement.

19. Le graphe ci-contre représente l'énergie potentielle $E_P(x)$ d'un point matériel dont la position est paramétrée la variable X telle que $X \geq 0$.
   a. Placer sur le graphe les valeurs de X qui correspondent à des positions d'équilibre. Indiquer si elles sont stables ou instables.
   b. A l'instant $t=0$, $X(t=0) = X_0$. Sachant que l'énergie mécanique du point matériel reste égale au cours du mouvement à 20J, surligner sur le graphe le domaine de variation possible pour X.



Conversion d'énergie :

20. Un objet ponctuel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une hauteur H au-dessus d'un plateau de masse négligeable par rapport à celle de l'objet.
   a. Avec quelle vitesse v_0 l'objet arrive-t-il sur le plateau ?
   b. Le plateau est lui-même fixé au sol par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. En supposant que l'objet reste en contact avec le plateau après le choc et que l'énergie potentielle de pesanteur et alors négligeable devant l'énergie potentielle élastique, déterminer la compression $|\ell - \ell_0|_{\max}$ maximum observée pour ce ressort.

Exercices

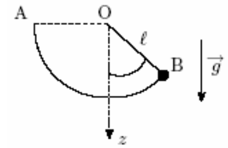
21 : *Calcul d'une force de frottement.(*)*

Un mobile effectue des oscillations rectilignes sinusoïdales entretenues, avec une amplitude X et une fréquence f constantes. Son abscisse x est donc du type $x(t) = X\cos(2\pi ft)$. Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive.

1. Exprimer la puissance instantanée fournie par la force de frottement au mobile.
2. En déduire l'expression du travail fourni par la force de frottement au mobile au cours d'une période du mouvement.

22 : *Pendule simple dont le fil casse.(**)*

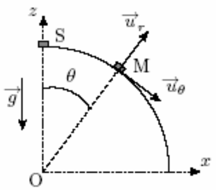
Un point matériel M, de masse m, attaché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée en un point fixe O, est lâché sans vitesse initiale depuis la position A telle que le fil soit horizontal. Le pendule effectue un quart d'oscillation, puis le fil se rompt alors qu le fil forme un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$ avec la verticale descendante Oz et que le point est en B.



1. Exprimer la norme v_B de la vitesse du point M en B en fonction de g, ℓ et α.
2. Quelle est ensuite la nature du mouvement, sachant que les frottements peuvent être négligés ? On note S le sommet de la trajectoire décrite par le point M à la suite de la rupture du fil.
3. Exprimer la norme v_S de la vitesse de passage en S.
4. En déduire la différence H entre les altitudes des points A et S en fonction de ℓ et α.

23 : *Point mobile sans frottement sur une sphère. (*)*

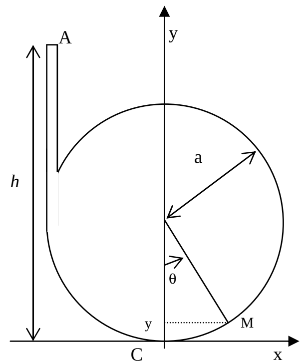
Un point M, de masse m, est placé à l'instant $t=0$ sur le sommet S d'une sphère sur laquelle il glisse sans frottement. On lui communique une vitesse horizontale v_0. Soit O le centre de la sphère et R son rayon.



1. Exprimer la norme v de la vitesse acquise sur la sphère en fonction de m, g, R et de l'angle $\theta = (\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OM})$.
2. En déduire l'intensité N de la réaction de la sphère sur le point M en fonction de m, g, R, v_0 et θ.
3. Pour quelle valeur θ_m de θ le point M quitte-t-il la sphère ? Quel est le mouvement ultérieur ? Tracer l'allure de la trajectoire.

24 : *Point mobile sans frottement dans une gouttière. (**)*

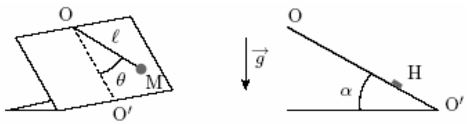
Une bille de masse m est lâchée en A avec une vitesse nulle. Elle se déplace sans frottement dans une gouttière qui se termine par une partie circulaire de rayon a.



1. La liaison avec la gouttière est supposée bilatérale :
   a. Exprimer l'énergie potentielle de la bille au point M.
   b. Discuter de la nature du mouvement (mouvement pendulaire ou de fronde) en fonction de la valeur de h.
   c. Déterminer notamment la valeur minimale de h qui fera que la bille parcourra la gouttière circulaire en entier.
2. La liaison avec la gouttière est supposée unilatérale :
   a. Déterminer la vitesse de la bille au point M en fonction de y et h.
   b. En déduire l'expression de l'intensité N de la réaction de la gouttière sur la bille en fonction de m, g, a, h et y.
   c. Discuter de nouveau la nature du mouvement (mouvement pendulaire ou de fronde) en fonction de la valeur de h.
   d. Déterminer notamment la valeur minimale de h qui fera que la bille parcourra la gouttière circulaire en entier.

25 : *Pendule sur un plan incliné. (**)*

Sur un plan solide incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal, on attache en un point fixe O du plan un fil de longueur ℓ, et on suspend à l'autre extrémité un point matériel M, de masse m. La position du pendule ainsi constitué est repérée par l'angle $\theta(t)$ formé par le fil avec la ligne OO' de plus grande pente sur le plan. On note H la projection orthogonale du point M sur cette ligne. Les cotes des différents points sont définies par rapport à l'axe vertical ascendant (Oz).

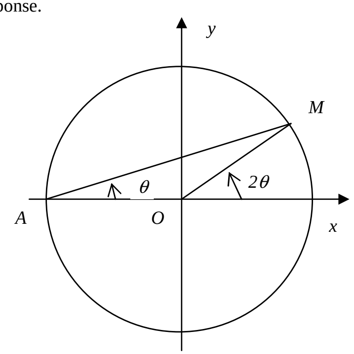


1. Exprimer les énergies cinétique et potentielle du point M en fonction de θ.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ. Est-elle linéaire ?
3. Quelle est la nature des oscillations de faible amplitude ? Préciser la réponse.

26 : *Point mobile sans frottement sur un cercle. (**)*

Une masselotte M, de masse m, peut coulisser sans frottements sur un cercle rigide vertical de rayon R. A ce point matériel est fixée l'une des extrémités d'un ressort élastique, de masse négligeable, de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 **négligeable devant** ℓ, dont l'autre extrémité est attachée à un point A du cercle.

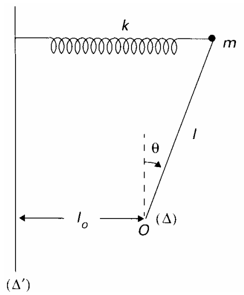
Déterminer les positions d'équilibre de la masselotte et étudier leur stabilité.



27 : *Equilibre d'un point matériel. (**)*

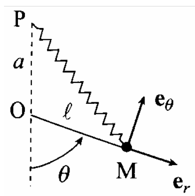
La barre est de masse négligeable. Le ressort de longueur à vide ℓ_0 peut coulisser sur (Δ') de manière à être constamment horizontal. Toutes les liaisons sont parfaites (sans frottement).

1. Déterminer les positions d'équilibre θ_e de la masse m et en étudier la stabilité.
2. Dans le cas d'une position d'équilibre stable, poser $\theta = \theta_e + \alpha$ pour déterminer l'équation différentielle en α des petites oscillations autour de θ_e. En déduire la période des petites oscillations.



28 : *Sismographe de La Coste. (***)*

La suspension de La Coste est constituée d'un pendule simple de masse m, dont la barre rigide, de longueur l et de masse négligeable, est fixée en O dans le référentiel d'étude galiléen. La masse ponctuelle en M est également reliée à un ressort de masse négligeable, de raideur k, de longueur nulle au repos et fixé en P à la verticale de O. La barre est astreinte à pivoter dans le plan vertical autour de O, sa position sera repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. On admettra que la réaction $\vec{R}$ de la barre sur M est radiale : $\vec{R} = R\vec{e_r}$. La distance OP sera notée a.



1. Déterminer l'énergie potentielle $E_P(\theta)$ de la masse en fonction de θ.
2. Déterminer la (les) position(s) d'équilibre et leur stabilité ; on introduira pour cela une valeur critique k_C de la raideur, et on discutera les deux cas $k < k_C$ et $k > k_C$.
3. Que se passe-t-il pour $k = k_C$?
4. Soit $k < k_C$. Déterminer l'équation du mouvement à partir de l'énergie.
5. Quelle est la longueur du pendule simple équivalent à ce système ? Donner la pulsation ω_0 des petites oscillations autour de $\theta = 0$; que devient-elle pour $k = k_C$? Quel est le mouvement général si $k = k_C$?

Réponses ou éléments de réponses :

1 : $W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = \vec{F} \bullet \overrightarrow{M_1M_2}$.

2 : $W_{M_1\to M_2}(\vec{R}_N) = 0$ et $W_{M_1\to M_2}(\vec{R}_T) = -f_d mgL_{12} < 0$.

3 : $W_{M_1\to M_2}(\vec{T}) = -\left[\frac{1}{2}k(x_2-\ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(x_1-\ell_0)^2\right]$

4 : $F = \frac{P}{v} = f$.

5 : 0,11 euros.

6 : $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2g\left(1+\frac{f_d}{\tan\alpha}\right)(z_B - z_A)}$; $(z_{B,\max} - z_A) = \frac{v_A^2 \tan\alpha}{2g(\tan\alpha + f_d)}$.

7 : $d_2 = d_1 \frac{v_2^2}{v_1^2}$.

9 : a. $\vec{v} = \overrightarrow{cste} = \vec{v}_0$. b. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$. c. $N = m\left(\frac{v_0^2}{R} - g(2-3\cos\theta)\right)$. d. $v_0 > 5gR$.

10 : a. $E_{p,P}(M) = mgz + cste(Oz\uparrow)$. b. $E_{p,P}(M) = -mgz + cste(Oz\downarrow)$.

13 : a. $r_0 = \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^{\frac{1}{3}}$. b. $V(r) = \frac{1}{2}K_1 r^2 + \frac{K_2}{r}$. c. $W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -(V(r_2) - V(r_1))$.

14 : b. $E_p(x) = E_p(x_e) + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e}(x-x_e)^2 + \ldots \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2$. c. $F_{C,x}(x) = \frac{-dE_p(x)}{dx} \approx -k(x-x_e)$.

d. Soit $(x-x_e) > 0$: si $k > 0$, alors $F_{C,x}(x) < 0$, le point matériel est rappelé vers x_e : x_e équilibre stable.

si $k < 0$, alors $F_{C,x}(x) > 0$, l'éloignement de x_e de s'accentue : x_e équilibre instable.

15 : a. $E_P(M) = mg\ell(1-\cos\theta)$. b. $\frac{dE_P}{d\theta}(\theta_{éq}) = mg\ell\sin\theta_{éq} = 0$: $\theta_{éq} = 0[\pi]$.

$\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\theta_{éq}) = mg\ell\cos\theta_{éq} = mg\ell$ si $\theta_{éq} = 0[2\pi]$ et $\frac{d^2E_P}{d\theta^2}(\theta_{éq}) = mg\ell\cos\theta_{éq} = -mg\ell$ si $\theta_{éq} = \pi[2\pi]$.

16 : b. $E_p(x) \approx E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2$. c. $E_M(M) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}k(x-x_e)^2 = cste$; $\ddot{x} + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e}(x-x_e) = 0$.

17 : c. $E_M(M) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = cste$. d. $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$. Mouvement borné ssi $E_M \le 2mg\ell$.

18 : c. $E_M(M) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 = cste$. d. $\ddot{z} + \frac{k}{m}(z-\ell_0) = 0$. Mouvement toujours borné.

20 : a. $v_0 = \sqrt{2gH}$. b. $|\ell - \ell_0|_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$.

21 : 1. $P(t) = -hv^2(t) = -h(2\pi fX)^2\sin^2(2\pi ft)$. 2. $W = -2hf\pi^2X^2$.

22 : 1. $v_B = \sqrt{2g\ell\cos\alpha}$ .2. $\vec{v} = v_B\cos\alpha\vec{u}_x + (gt - v_B\sin\alpha)\vec{u}_z$ .3. $\vec{v}_S = v_B\cos\alpha\vec{u}_x$, $v_S = \sqrt{2g\ell}\cos^{\frac{3}{2}}\alpha$ .4. $v_S = \sqrt{2gH}$, $H = \ell\cos^3\alpha$

23 : 2. $N = m\left[g(3\cos\theta - 2) - \frac{v_0^2}{R}\right]$. 3. $\cos\theta_m = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}$.

24 : 1. $h < 2a$: mouvement pendulaire ou $h > 2a$: mouvement révolutif.

2. $v^2 = 2g(h-y)$. $N = \frac{mg}{a}(2h + a - 3y)$: $h < a$: mouvement pendulaire ou $2h > 5a$: mouvement révolutif.

25 : 1. $E_C(M) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$, $E_P(M) = mg\sin\alpha\ell(1-\cos\theta)$. 2. $\ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{\ell}\sin\theta = 0$.

3. Aux petites oscillations, oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g\sin\alpha}{\ell}}$.

26 : $\theta_{\text{eq1}} = \frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{mg}{kR}\right)$ instable ; $\theta_{\text{eq2}} = \frac{1}{2}\text{Arctan}\left(\frac{mg}{kR}\right) - \frac{\pi}{2}$ stable.

27 : 1. $\theta_{eq} = 0$ (stable si $kl > mg$ et instable si $kl < mg$) ; $\theta_{eq} = \pi$ (stable) ; $\cos\theta_{eq} = \frac{mg}{kl}$ si $kl > mg$ (instable).

2. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}}}$ pour $\theta_{eq} = 0$ et $kl > mg$; $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l}}}$ pour $\theta_{eq} = \pi$.

28 : 1. $E_p(\theta) = (ka - mg)l\cos\theta + C$. 2. $k_c = \frac{mg}{a}$; $\theta_{eq} = 0$ (stable pour $k < k_C$) ; $\theta_{eq} = \pi$ (stable pour $k > k_C$).

4. $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(1 - \frac{k}{k_c}\right)\sin\theta = 0$. 5. $L' = \frac{l}{1 - \frac{k}{k_c}}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{k}{k_c}\right)}$.