TD Méca2 : DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL EN REFERENTIEL GALILEEN

Applications directes du cours

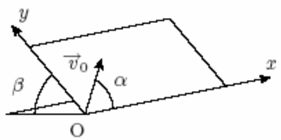
1. Calculer la force d'attraction qu'exerce une pomme de masse $m = 80g$ sur la Terre.

2. Un footballeur tire un penalty. La masse du ballon est $m = 0,453\text{kg}$, la force d'impact exercée par le pied est d'intensité $F = 250\text{N}$ (supposée constante tout au long de la frappe) et la durée de contact entre le pied et le ballon est $\tau = 20\text{ms}$.
   En déduire la vitesse v acquise par le ballon à la fin de la frappe.

3. Etude du mouvement d'un point matériel $M\{m\}$ (en O avec $\vec{v}_0$ à $t = 0$) soumis au seul champ de pesanteur terrestre supposé uniforme :
   a. Etablir les équations horaires et l'équation de la trajectoire.
   b. En déduire la flèche et la portée du mouvement.
   c. Tracer l'allure de la trajectoire.
   d. Déterminer le lieu des points que pourra atteindre le point M lors de son mouvement (notion de parabole de sûreté)

4. Etude du mouvement d'un point matériel $M\{m\}$ (en O avec $\vec{v}_0$ à $t = 0$) soumis au champ de pesanteur terrestre supposé uniforme et à une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$:
   a. Etablir l'expression du vecteur-vitesse $\vec{v}(t)$.
   b. Déterminer la vitesse limite atteinte par le point M.
   c. Etablir les équations horaires.
   d. Tracer l'allure de la trajectoire.

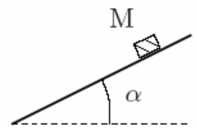
5. Glissement sans frottement sur un plan incliné.
   Un point matériel M de masse m est lancé à la date $t = 0$ depuis l'origine O d'un support plan (xOy) incliné d'un angle β par rapport au plan horizontal tel que l'axe (Ox) soit horizontal. Le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ contenu dans le plan (xOy), forme un angle α avec l'axe (Ox). Les frottements sur le support plan et avec l'air sont négligés.



   a. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à M en projection dans la base cartésienne.
   b. En déduire les équations horaires du mouvement en fonction de v_0, g, α et β.
   c. Déterminer l'équation $y(x)$ de la trajectoire suivie et identifier sa nature.
   d. Examiner et commenter les cas limites $\beta = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$.

6. Etude du mouvement d'un point matériel $M\{m\}$ suspendu à un ressort ($Oz\uparrow$ ascendant) :
   a. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
   b. Déterminer la position du point matériel à l'équilibre.
   c. Résoudre l'équation différentielle dans le cas d'un point matériel initialement écartée de a de sa position d'équilibre (dans le sens de l'étirement du ressort) et lâché sans vitesse initiale.
   d. Tracer l'allure de la fonction $z(t)$.
   e. Reprendre toute l'étude précédente avec ($Oz\downarrow$ descendant).

7. Etude du mouvement d'un mobile $M\{m\}$ (en M_0 avec $\vec{v}_0 = \vec{0}$ à $t = 0$) frottant sur un plan incliné d'un angle α avec le plan horizontal :
   a. Etablir la condition sur l'angle α pour que le mobile reste immobile sur le plan.
   b. Etablir l'équation horaire du mouvement si le mobile glisse sur le plan.

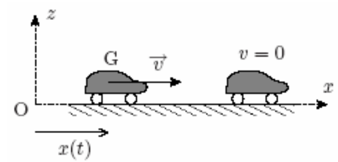


8. Etude du mouvement sans frottement d'un point matériel $M\{m\}$ à partir du sommet d'une sphère de centre O et de rayon R :
   Le point est lancé du sommet avec la vitesse $\vec{v}_0$ horizontale.
   a. Déterminer l'expression de la réaction normale de la sphère sur le mobile au cours du mouvement en fonction de m, g, v_0 et θ l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale passant par O.
   b. En déduire pour quelle valeur de θ le mobile quitte la sphère.

Exercices

9 : *Distance de freinage.(*)*

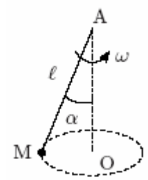
Lors d'un test de freinage, une voiture assimilée à un point matériel G de masse $m = 1300\text{kg}$, roule sur une route horizontale et freine alors que sa vitesse est $v_1 = 100\text{km.h}^{-1}$. Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est $T = 7\text{s}$.
On suppose que la force de freinage F_0 est constante. Le référentiel lié au sol est supposé galiléen. La position de la voiture est repérée par son abscisse $x(t)$ mesurée sur l'axe (Ox) du mouvement. On choisit comme origine des dates $t = 0$ l'instant du début du freinage pour lequel $x = 0$.



1. Exprimer la force de freinage F_0 en fonction des données. Calculer F_0.
2. Calculer la distance d'arrêt d.
3. Exprimer la distance d'arrêt d en fonction de la vitesse initiale v_1, de F_0 et de m.
   Que se passe-t-il si la vitesse initiale est multipliée par deux ?

10 : *Mouvement circulaire **horizontal** d'un pendule (*)*

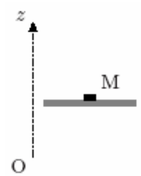
Un point matériel M de masse m est suspendu en un point fixe A par un fil de longueur ℓ inextensible et de masse négligeable. Il décrit un cercle horizontal à la vitesse angulaire de rotation ω constante. On note α l'angle formé par le fil avec la verticale descendante.



1. Exprimer l'accélération du point M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
2. Déterminer la tension du fil et l'angle α qu'il forme avec la verticale. En déduire une condition sur ω pour que ce mouvement soit possible.

11 : *Plateau oscillant. (*)*

Un objet M de masse m est posé sur un plateau animé d'un mouvement vertical sinusoïdal (on supposera le contact sans frottement). La cote z de tout point du plateau varie selon $z(t) = Z\cos(2\pi ft)$.



1. On suppose le contact entre l'objet et le plateau constamment maintenu. Déterminer l'expression de la réaction $\vec{R}(t) = R(t)\vec{e}_z$ en fonction de m, g, Z et f.
2. A quelle condition sur la fréquence f le contact entre l'objet et le plateau est-il effectivement maintenu ?
3. Sous cette hypothèse, pour quelles positions du plateau la réaction R est-elle minimale au cours du mouvement ? Maximale ?

12 : *Chute d'une particule. (**)*

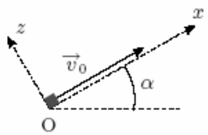
Un particule M de masse m, assimilée à un point matériel, est lancée vers le bas avec la vitesse initiale v_0, depuis l'origine O d'un axe vertical **descendant** (Oz). La résistance de l'air, opposée à la vitesse, est du type frottement fluide : $\vec f=-bm\vec v$ où b est une constante positive.

Données : $g=10\text{m.s}^{-2}$; $b=0{,}8\text{s}^{-1}$; $v_0=10\text{m.s}^{-1}$; $m=500\text{g}$.

1. Exprimer la vitesse limite $v_{\lim}$ atteinte par la particule. Calculer $v_{\lim}$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v_z(t)$. En déduire l'expression de $v_z(t)$ en fonction de $v_{\lim}, g$ et b.
3. Tracer l'allure de la fonction $v_z(t)$ pour $t\geq 0$.
4. Déterminer la date t_1 à partir de laquelle la vitesse de la particule atteint sa valeur limite à 1 % près.
5. Quelle est alors la distance parcourue par la particule ?

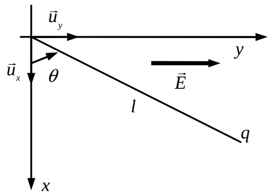
13 : *Glissement avec frottement. (**)*

Un petit parallélépipède, assimilable à un point matériel M de masse m, est lancé depuis le point origine O d'un plan (xOy) incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, avec un vecteur vitesse initial $\vec v_0$ dirigé suivant la ligne de plus grande pente (Ox) et vers le haut. La position du point M à l'instant t est repérée par son abscisse $x(t)$. On tient compte des forces de frottement solide.



1. Montrer qu'au début du mouvement (c'est-à-dire tant qu'il y a glissement vers le haut), l'accélération $\ddot x$ du mobile est du type $\ddot x=-Kg$. Exprimer K en fonction de α et f (coefficient de frottement solide).
2. Quelle distance d le mobile parcourt-il avant que sa vitesse ne s'annule ?
3. A quelle condition sur l'angle α le mobile s'arrête-t-il définitivement ?

14 : *Pendule électrostatique. (***)*



1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule électrostatique de masse m, de longueur l, portant une charge q positive et placé dans un champ électrostatique uniforme $\vec E$ horizontal (on admet qu'il est de ce fait soumis à la force supplémentaire $\vec F=qE\vec u_y$). Le référentiel d'étude est supposé galiléen.
2. Dans le cas de faibles oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer la période des oscillations. On déterminera pour cela la position d'équilibre du pendule (caractérisée par $\theta_{éq}$) puis posera $\theta=\theta_{éq}+\alpha$ pour enfin déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle α.

15 : *Viscosimètre à chute de bille. (*)*

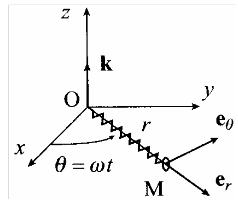
Une bille sphérique, de masse volumique μ_B, et de rayon R, est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide de masse volumique μ. En plus du poids et de la poussée d'Archimède, on tient compte de la force de viscosité exercée par le fluide sur la bille, opposée au déplacement et de norme $f=6\pi\eta Rv$ où η est la viscosité du fluide et v la norme de la vitesse de la bille. Le champ de pesanteur a pour intensité g. Le référentiel d'étude est supposé galiléen et la bille est assimilée à un point matériel B.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec v$ de la bille.
2. En déduire sans calcul la vitesse limite $\vec v_\infty$ atteinte par la bille.

On suppose que la bille atteint très rapidement cette vitesse limite. On mesure la durée Δt nécessaire pour que la bille parcoure une distance H donnée.

3. Déterminer la relation entre $\Delta t, g, H, \mu, \mu_B, R$ et η.
4. Montrer que l'expression de la viscosité η du fluide peut se mettre sous la forme $\eta=K(\mu_B-\mu)\Delta t$, en exprimant la constante d'étalonnage K.
5. Calculer η si $\Delta t=83\text{s}$, $K=14.10^{-8}\text{m}^2.\text{s}^{-2}$, $\mu_B=7880\text{kg.m}^{-3}$, $\mu=912\text{kg.m}^{-3}$, $g=9{,}8\text{m.s}^{-2}$.

16 : *Rotation d'un ressort lesté. (***)*



Dans un référentiel galiléen Oxyz, une tige tourne à vitesse angulaire constante ω dans le plan horizontal. Un anneau de masse *m* enfilé sur la tige est astreint à se déplacer sans frottement le long de celle-ci. Il est également relié à un ressort de raideur *k* et de longueur à vide l_0, dont l'autre extrémité est fixée en O. On utilisera les coordonnées polaires pour repérer la masse dans le plan.

1. Projeter le principe fondamental dans la base $\left(\vec e_r, \vec e_\theta, \vec k\right)$.
2. Expliquer pourquoi le modèle proposé ne reste valable que pour certaines valeurs de ω ; préciser la valeur maximale envisageable ω_{max}. Déterminer dans ce cas la distance d'équilibre r_{eq} en fonction de ω.
3. Le ressort est initialement au repos, et l'anneau lâché sans vitesse par rapport à la tige. Résoudre l'équation du mouvement afin d'obtenir *r(t)* pour $\omega<\omega_{max}$.

Réponses ou éléments de réponses :

1 : $F=0{,}784$ N. **2 :** $v=\frac{F\tau}{m}$; $v=11{,}0$ m.s^{-1}.

3 : a. $z=\frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha.x$. b. $z_{max}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$, $x_p=\frac{v_0\sin 2\alpha}{2g}$. d. $z\leq\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2v_0^2}x^2$.

4 : a. $\vec v(t)=\vec g\tau+(\vec v_0-\vec g\tau)e^{\frac{-t}{\tau}}$. c. $\overrightarrow{OM}(t)=v_0\cos\alpha\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\vec e_x+\left(\left(v_0\sin\alpha+g\tau\right)\tau\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)-g\tau t\right)\vec e_z$.

5 : c. $z=\frac{-g\sin\beta}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+\tan\alpha.x$. d. $\beta=\frac{\pi}{2}$: chute libre et $\beta=0$: mouvement rectiligne uniforme $\vec v(t)=\vec v_0=\overrightarrow{cste}$.

6 : a. Avec $Oz\uparrow$ ascendant : $\ddot z+\frac{k}{m}z=-\frac{k}{m}\left(l_0+\frac{mg}{k}\right)$. b. $z_{eq}=-l_{eq}=-\left(l_0+\frac{mg}{k}\right)$. c. $z(t)=z_{eq}-a\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

7 : a. $\tan\alpha<f$. B. $x(t)=\frac{-Kg}{2}t^2+x_0$ avec $K=(\sin\alpha+f\cos\alpha)$.

8 : a. $N(\theta)=3mg\cos\theta-2mg-\frac{mv_0^2}{R}$. b. $\cos\theta_d=\frac{2}{3}+\frac{v_0^2}{3gR}$.

9 : 1. $F_0=\frac{mv_1}{T}$. 2. $d=\frac{v_1T}{2}$. 3. $d=\frac{mv_1^2}{2F_0}$. 4. $d_2=4d_1$.

10 : 2. $T=mL\omega^2$; $\cos\alpha=\frac{g}{L\omega^2}$. **11 :** 1. $\vec R(t)=m\left[g-Z(2\pi f)^2\cos(2\pi ft)\right]\vec e_z$. 2. $g>a\omega^2$.

12 : 2. Avec Oz descendant : $v_z(t)=\frac{g}{b}+\left(v_0-\frac{g}{b}\right)e^{-bt}$ 2. $t_1=3{,}74$ s, $d=43{,}8$ m.

13 : 1. $\ddot x=-Kg$ avec $K=(\sin\alpha+f\cos\alpha)$. 2. $d=\frac{v_0^2}{2Kg}$ .3. $\tan\alpha<f$.

14 : 1. $\tan\theta_{éq}=\frac{qE}{mg}$. 2. $\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{g}{l}\sqrt{1+\left(\frac{qE}{mg}\right)^2}\sin\alpha=0$ **15 :** 2. $\vec v_\infty=\frac{2R^2(\mu_B-\mu)}{9\eta}\vec g$. 4. $\eta=\frac{2R^2g}{9\text{H}}(\mu_B-\mu)\Delta t$.

16 : 2. $\omega_{max}=\sqrt{\frac{k}{m}}$; $r_{eq}=\frac{l_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{max}^2}}$. 3. $r(t)=r_{eq}\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_{max}^2}\cos\left(\sqrt{\omega_{max}^2-\omega^2}\,t\right)\right]$.