TD Méca1 : CINEMATIQUE DU POINT

Applications directes du cours

1. Déterminer les coordonnées cylindriques puis sphériques du point M dont les coordonnées cartésiennes sont $M(1,1,1)$. En déduire l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans chacune des trois bases.

2. Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z).
   Quel est le lieu des points tels que : $r = cste$? $\theta = cste$? $z = cste$?

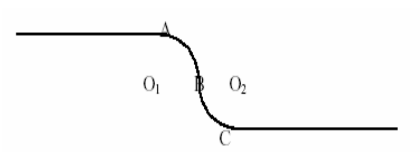
3. Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ).
   Quel est le lieu des points tels que : $r = cste$? $\theta = cste$? $\varphi = cste$?

4. Un automobiliste démarre à $t = 0$ au point origine O d'un axe (Ox) avec une accélération $a_1 = 3\text{m.s}^{-2}$. Au même moment roule devant lui à une distance $D = 50\text{m}$, un second automobiliste avec une vitesse constante $v_2 = 50\text{ km.h}^{-1}$.
   a. Exprimer les équations horaires des deux automobilistes $x_1(t)$ et $x_1(t)$.
   b. A quelle date t_0 aura lieu la collision ?

5. On donne les composantes cartésiennes de l'accélération a d'un point mobile décrivant une trajectoire plane $a_x = 0{,}8$ et $a_y = 0$. A l'instant initial, les composantes de la vitesse V_0 dans le même repère cartésien sont $V_x = 0$ et $V_y = 0{,}8$, et la particule se trouve à l'origine du repère.
   a. Déterminer l'équation de la trajectoire.
   b. Calculer la vitesse V du mobile à la date $t = 1\text{s}$.
   c. Calculer son accélération à la même date.

6. Une masse accrochée à un ressort a un mouvement d'oscillations rectilignes suivant l'axe, d'amplitude $X = 10\text{cm}$ et de période $T = 0{,}5\text{s}$.
   a. Exprimer son équation horaire.
   b. Exprimer puis calculer l'accélération maximale $a_{\max}$ subie par la masse au cours du mouvement.

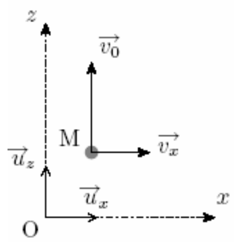
7. Préciser l'accélération subie par un mobile se déplaçant à la vitesse $v = 72\text{km.h}^{-1}$ constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles, raccordés par deux quarts de cercle de même rayon $R = 20\text{m}$: avant A, entre A et B, entre B et C, après C.



8. Les villes de Paris (P) et Tokyo (T) sont repérées sur le globe terrestre, assimilé à une sphère de rayon R, par leurs coordonnées géographiques – latitude λ et longitude ψ – suivantes :
   Paris $(\lambda_1 = 48°52', \psi_1 = 2°20')$ Tokyo $(\lambda_2 = 25°42', \psi_2 = 139°30')$
   a. Quelles sont les coordonnées sphériques (R_1,θ_1,φ_1) et (R_1,θ_1,φ_1) de ces deux villes ?
   b. Déterminer en fonction de θ et φ les composantes dans la base cartésienne $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ du vecteur $\vec{e}_r$ de la base sphérique.
   c. Soit α l'angle au centre de la Terre entre (P) et (T). En utilisant la relation $\vec{e}_r(P)\bullet\vec{e}_r(T) = \cos\alpha$, exprimer puis calculer l'angle α.
   d. En déduire la distance Paris – Tokyo à vol d'oiseau.

9 : *Trajectoire d'un ballon sonde. (*)*

Un ballon-sonde M, lâché au niveau du sol, s'élève avec une vitesse verticale v_0 supposée constante. Le vent lui communique une vitesse horizontale v_x orientée suivant l'axe (Ox) et proportionnelle à son altitude z : $v_x = \dfrac{z}{\tau}$ où $\tau > 0$. A l'instant $t = 0$, le ballon-sonde est lâché depuis le point O. On note $(x(t),z(t))$ les coordonnées cartésiennes du point M dans le plan (xOz).

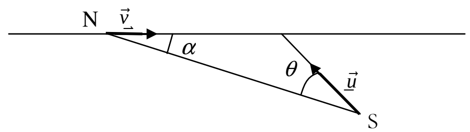


1. En utilisant le vecteur vitesse du ballon, écrire les équations différentielles vérifiées par $x(t)$ et $z(t)$.
2. En déduire les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ en fonction de v_0, τ et t.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire suivie par le ballon sonde. Quelle en est la nature ?
4. Exprimer dans la base cartésienne $(\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ les composantes du vecteur accélération du ballon sonde.

10 : *Trajectoires rectilignes. (*)*

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{v}$. Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\overrightarrow{NS},\vec{v}) = \alpha$. T est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\vec{u}$.

1. Déterminer quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\vec{u},\overrightarrow{SN})$ si l'on veut couler le navire.
2. Si l'on veut que la torpille atteigne le navire en un temps minimum, à quel instant, c'est à dire pour quelle valeur de α, convient-il de tirer ? Calculer la valeur de θ correspondante.



11 : *Risque de collision au freinage. (**)*

1. Une voiture roule à une vitesse constante V_1 en ligne droite. Au temps $t = 0$, le conducteur aperçoit un obstacle, mais il ne commence à freiner qu'au bout d'un temps $\varepsilon = 0{,}6s$ (temps de réaction du conducteur). La voiture possède alors une décélération constante $a = 7{,}5\text{m.s}^{-2}$.
   Calculer la distance parcourue par le véhicule depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt.
   Données : $V_1 = 54\text{km.h}^{-1}$ puis $V_1 = 108\text{km.h}^{-1}$.
2. Deux voitures se suivent sur une route droite, à une distance d, et roulent à la même vitesse constante V_2. A l'instant $t = 0$, la première voiture commence à freiner avec une décélération a, la seconde voiture ne commence à freiner qu'après un temps ε avec une décélération $b < a$.
   Quelle condition doit satisfaire d pour que la seconde voiture s'arrête avant d'heurter la première ?
   Données : $V_2 = 108\text{km.h}^{-1}$; $b = 6\text{m.s}^{-2}$.

12 : *Trajectoire dans un milieu résistant. (**)*

Un mobile animé d'une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{i}$ constante, pénètre dans un milieu résistant dans lequel il est soumis à une accélération $\vec{a} = -kv^2\vec{i}$ où k est une constante et v la vitesse instantanée.

1. En prenant pour origine des temps et des espaces le moment où le mobile pénètre dans le milieu, établir la loi donnant $v(t)$.
2. En déduire l'équation du mouvement.
3. Montrer qu'après un parcours x, la vitesse est $v = v_0 e^{-kx}$.

13 : *Mouvement hélicoïdal; vitesse et accélération en coordonnées cylindriques. (*)*

Les coordonnées cylindriques d'un point M décrivant une hélice sont données au cours du temps par :

$$r = R_0\ ;\quad \theta = \omega t\ ;\quad z = \frac{\omega t}{2\pi}h \qquad \text{où } R_0,\ \omega \text{ et } h \text{ sont des constantes.}$$

1. Déterminer les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
2. Montrer que le mouvement est uniforme (c'est-à-dire que le module de la vitesse est indépendant du temps).
3. En comparant les composantes du vecteur vitesse, montrer que le vecteur vitesse fait avec l'axe (Oz) un angle α constant. Exprimer $\tan\alpha$ en fonction de R_0 et h.

14 : *Mouvement sur une spirale logarithmiques. (*)*

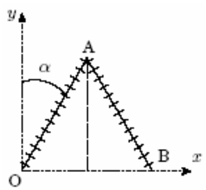
Un point matériel M décrit un mouvement plan suivant la loi $r = r_0 e^{-\theta}$, avec une vitesse angulaire $\omega = d\theta / dt$ constante.

1. Déterminer, en coordonnées polaires et dans la base polaire, les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point M.
2. En déduire les modules de ces vecteurs.

15 : *Echelle double. (*)*

Une échelle double est posée sur le sol, un des points d'appui de l'ensemble restant constamment en contact avec le coin O d'un mur. La position de l'échelle à un instant t est repérée par l'angle $\alpha(t)$ formé par la portion OA de l'échelle avec le mur. L'extrémité B de l'échelle glisse sur le sol. L'échelle est telle que $OA = AB = \ell$.

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}_A$ et accélération $\vec{a}_A$ du point A dans la base polaire $(\vec{e}_\ell, \vec{e}_\theta)$ en fonction de ℓ, α, $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.
2. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}_B$ et accélération $\vec{a}_B$ du point B dans la base cartésienne en fonction de ℓ, α, $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$.



Réponses ou éléments de réponse :

1 : En coordonnées cylindriques : $M\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ et $\overrightarrow{OM} = \sqrt{2}\vec{e}_r + \vec{e}_z$. En sphériques : $M\left(\sqrt{3}, \mathrm{Arctan}\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\overrightarrow{OM} = \sqrt{3}\vec{e}_r$

2 : En coordonnées cylindriques : $r = cste$: cylindre infini d'axe (Oz) et de rayon r, $\theta = cste$: demi-plan délimité par l'axe (Oz) et faisant un angle θ avec l'axe (Ox), $z = cste$: plan perpendiculaire à l'axe (Oz) situé à la cote z.

3 : En coordonnées sphériques : $r = cste$:sphère de rayon r, $\theta = cste$: cône de sommet O et de demi-angle au sommet θ, $\varphi = cste$: demi-plan délimité par l'axe (Oz) et faisant un angle φ avec l'axe (Ox).

4 : 1. $x_1(t) = \frac{a_1}{2}t^2$ et $x_2(t) = D + v_2 t$. 2. $t_0 = \frac{v_2}{a_1}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2a_1 D}{v_2^2}}\right)$.

5 : $y^2 = 1{,}6x$. 2. $V = \sqrt{(a_x t)^2 + v_y^2}$, $V = 1{,}13\ m.s^{-1}$. 3. $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $a = 0{,}8\ m.s^{-2}$.

6 : 1. $x(t) = X\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. 2. $a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 X$, $a_{\max} = 15{,}8\mathrm{m.s^{-2}}$.

7 : Avant A : $a = 0$, entre A et B : $a = 20\ m.s^{-2}$, entre B et C : $a = 20\ m.s^{-2}$, après C $a = 0$.

8 : 1. $P\left(R, \lambda_1 - \frac{\pi}{2}, \psi_1\right)$, $T\left(R, \lambda_2 - \frac{\pi}{2}, \psi_2\right)$. 3. $\cos\alpha = \sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2$. 4. $d = R\alpha$.

9 : 1. $\frac{dx}{dt} = \frac{z}{\tau}$ et $\frac{dz}{dt} = v_0$. 2. $z(t) = v_0 t$ et $x(t) = \frac{v_0 t^2}{2\tau}$. 3. $z = \sqrt{2v_0\tau x}$. 4. $\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}\vec{u}_x$.

10 : 1. $\sin\theta = \frac{v}{u}\sin\alpha$. 2. $\alpha = \arctan\left(\frac{u}{v}\right)$ et $\theta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right)$.

11 : 1. $d_1 = V_1\varepsilon + \frac{V_1^2}{2a}$. 2. Il faut $d + d_1 > d_2$, il faut donc $d > V_2\varepsilon + \frac{V_2^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

12 : 1. $v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}$. 2. $x = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 t)$. 3. $x = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$.

13 : 1. $\vec{v} = R_0\omega\vec{e}_\theta + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{e}_z$, $\vec{a} = -R_0\omega^2\vec{e}_r$. 2. $v = \omega\sqrt{R_0^{\ 2} + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$. 3. $\tan\alpha = \frac{2\pi R_0}{h}$.

14 : 1. $\vec{v} = r\omega(\vec{e}_\theta - \vec{e}_r)$, $v = r\omega\sqrt{2}$, $\vec{a} = -2r\omega^2\vec{e}_\theta$, $a = 2r\omega^2$.

15 : 1. $\vec{v}_A = \ell\dot{\alpha}\vec{e}_\theta$, $\vec{a}_A = \ell\left(\ddot{\alpha}\vec{e}_\theta - \dot{\alpha}^2\vec{e}_\ell\right)$. 2. $\vec{v}_B = -2\ell\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{e}_x$, $\vec{a}_B = 2\ell\left(\dot{\alpha}^2\sin\alpha - \ddot{\alpha}\cos\alpha\right)\vec{e}_x$.