# TD Méca4 : OSCILLATEURS MECANIQUES LIBRES A UN DEGRE DE LIBERTE.

## *Applications directes du cours*

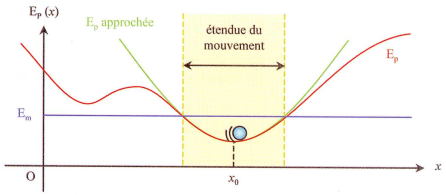
### Oscillateurs harmoniques non amortis usuels :

1. Pendule élastique horizontal : on considère un mobile de masse $m$ lié au bâti par un ressort $(k, l_0)$. Le mobile peut se déplacer horizontalement le long d'un axe $Ox$ où sa position est repérée par son abscisse $x$.
   a. Utiliser le théorème de l'énergie mécanique pour déterminer l'intégrale première du mouvement du mobile. (On introduira la variable $X$ représentant l'allongement)
   b. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
   c. Quelle est la pulsation propre des oscillations ? Leur période propre ?
   d. Quelle est la forme de $x(t)$ ?

2. Pendule élastique vertical : on considère un mobile de masse $m$ suspendu à un ressort $(k, l_0)$. Le mobile peut se déplacer verticalement le long d'un axe $Oz$ (descendant) où sa position est repérée par sa cote $z$.
   a. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour déterminer l'équation différentielle du mouvement.
   b. Effectuer le changement de variable $Z = z - l_{éq}$. En déduire l'équation différentielle en $Z$ du mouvement.
   c. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?
   d. Quelle est la forme de $z(t)$ ?

3. Pendule simple AUX PETITES OSCILLATIONS : on considère un pendule simple $(m, l)$ dont la position est repérée par l'angle $\theta$ que fait le fil avec la verticale.
   a. Exprimer l'énergie mécanique du système. Que devient-elle pour des oscillations de faible amplitude ?
   b. En déduire l'intégrale première du mouvement puis l'équation différentielle du mouvement.
   c. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?
   d. Quelle est la forme de $\theta(t)$ ?

4. On considère un point matériel M de masse $m$ décrit par un seul degré de liberté noté $x(t)$. On s'intéresse au mouvement de ce point matériel dans un champ de forces conservatives, au proche voisinage de la position d'équilibre stable $x_e$. On note $E_P(x)$ l'énergie potentielle du point matériel.




   a. Effectuer un développement de Taylor à l'ordre 2 de $E_P(x)$ au voisinage de $x_e$. Introduire $k = \left(\frac{\partial^2 E_P}{\partial x^2}\right)_{x=x_e}$.
   b. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de $x$ puis en fonction de $X = x - x_e$.
   c. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
   d. Quelle est la pulsation propre des oscillations ?

5. On considère un mobile de masse $m$ lié au bâti par un ressort $(k, l_0)$. Le mobile peut se déplacer horizontalement le long d'un axe $Ox$ où sa position est repérée par son abscisse $x$.
   a. Rappeler l'équation différentielle du mouvement en $X = x - l_0$. Introduire la pulsation propre $\omega_0$.

On a alors : $X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

   b. Calculer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique puis l'énergie mécanique du système. Tracer sur un même graphe l'allure des courbes $E_P(t), E_C(t)$ et $E_M(t)$.
   c. Calculer les moyennes temporelles de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique. Conclure.





### Oscillateurs harmoniques amortis par frottements fluides :

6. Quelle est l'équation différentielle caractéristique d'un oscillateur libre amorti ? (Introduire les grandeurs $(\xi, \omega_0)$, $(Q, \omega_0)$, $(\tau_e, \omega_0)$ et les nommer). Citer un exemple.
   Quels sont alors les différents mouvements (transitoires), c'est à dire les différents régimes libres observables ?

7. Aspect énergétique d'un oscillateur libre et amorti : on considère un mobile de masse $m$ lié au bâti par un ressort $(k, l_0)$. Il est de plus soumis à une force de frottements fluides de la forme $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Le mobile peut se déplacer horizontalement le long d'un axe $Ox$ où sa position est repérée par son abscisse $x$.
   a. Effectuer un bilan d'énergie sur un oscillateur libre et amorti. Introduire la variable $X = x - l_0$.
   b. En déduire l'expression de $\frac{dE_m}{dt}$.
   c. Cas d'oscillations TRES faiblement amorties :
      i. Donner l'expression générale de $X(t)$. En déduire l'expression de $\dot{X}(t)$.
      ii. Montrer que l'énergie mécanique du système peut s'écrire $E_m(t) = E_m(0) e^{\frac{-t}{\tau_e}}$.

8. Développer les analogies électromécaniques (entre circuit $(R, L, C)$ série et système {masse-ressort-amortisseur}).

## *Autres exercices*

### Oscillateurs harmoniques non amortis usuels :

**1 :** *(*)* Une masse $m = 50\,\text{g}$, attachée à un ressort de constante de raideur $k = 50\,\text{N.m}^{-1}$, peut osciller sans frottement sur un axe horizontal. La masse étant à l'équilibre, on lui communique une vitesse $v_0 = 1\,\text{m.s}^{-1}$.
1. Calculer l'énergie mécanique de la masse.
2. En déduire l'allongement maximal du ressort au cours des oscillations.

**2 : Etude énergétique de l'oscillateur harmonique.** *(*)*
Un solide $S$ de masse $m = 200\,\text{g}$, se déplace sans frottement, sur un guide horizontal. Il est accroché à un ressort sans masse, de raideur $k = 20\,\text{N.m}^{-1}$. L'origine est prise au niveau de la position d'équilibre du solide en l'absence de tout frottement. On écarte le solide de $a = 5\,\text{cm}$ dans le sens qui étire le ressort et on l'abandonne sans vitesse initiale.
1. Exprimer l'énergie mécanique du dispositif. On prendra comme référence l'énergie potentielle $E_P(0) = 0$.
2. Déterminer l'équation différentielle du mouvement. La résoudre.
3. En déduire les expressions de l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique du système en fonction du temps.
4. Représenter ces énergies sur un même graphe.

**3 :** *(*)* Une bille M de masse $m = 200\,\text{g}$ est suspendue à un ressort de longueur à vide $l_0$ et de constante de raideur $k$. A l'équilibre, le ressort est allongé de $\Delta l_{éq} = 5\,\text{cm}$. Un choc vertical orienté vers le haut communique alors à la bille une vitesse $v_0$. La bille remonte de $h = 2\,\text{cm}$ et se met osciller. Les frottements sont négligés.
1. Exprimer puis calculer la constante de raideur $k$ du ressort.
2. Déterminer en fonction de $h$ et des données la vitesse initiale $v_0$ communiquée à la bille lors du choc : A.N..
3. Quel est l'allongement maximal $\Delta l_{max}$ du ressort au cours des oscillations de la bille ?

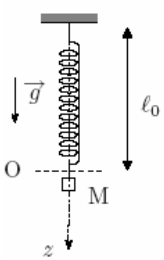
**4 :** *(*)* Un point matériel M de masse $m$ est relié à l'extrémité d'un ressort $(k, l_0)$ attaché à un point fixe O. L'ensemble est placé sur un plan incliné d'un angle $\alpha$ par rapport à l'horizontale. Les frottements sont négligés.
1. Exprimer la longueur $l_{éq}$ du ressort lorsque le point M est à l'équilibre.
2. On pose $x = l - l_{éq}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x$ lorsque la masse $m$ est en mouvement. Que remarque-t-on ?

## Oscillateurs harmoniques amortis usuels :

**5 :** *(*)* On considère une masse $m = 100\,\text{g}$ accrochée à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 20\,\text{N.m}^{-1}$ et reliée à un amortisseur de coefficient $h = 2\,\text{kg.s}^{-1}$.

1. Montrer que le déplacement $x$ par rapport à l'équilibre de la masse vérifie l'équation différentielle :
$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 .$$
2. Montrer que le régime est pseudo-périodique.
3. Calculer la pseudo-période des oscillations.
4. Evaluer la durée du régime transitoire.

**6 :** *(*)* Un ressort $(k, l_0)$ pend verticalement. A l'instant $t = 0$, on accroche une masse $m$ à l'extrémité inférieure et on la lâche sans vitesse initiale. La masse subit des frottements fluides du type $\vec{f} = -h\vec{v}$, suffisamment faibles pour pouvoir considérer que la pseudo-période $T$ du mouvement est égale à la période propre $T_0$, c'est-à-dire à la période du mouvement non amorti. La position de la masse, assimilée à un point matériel M, est repérée par sa cote $z$ mesurée sur un axe vertical descendant ayant pour origine la position initiale de la masse.




1. Quelle sera la cote $z_{éq}$ de la masse $m$ à l'équilibre ?
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z$. L'écrire en faisant intervenir $z_{éq}$, la pulsation propre et la constante $\lambda = \dfrac{h}{2m}$.
3. Exprimer la loi horaire $z(t)$ pour $t \geq 0$.

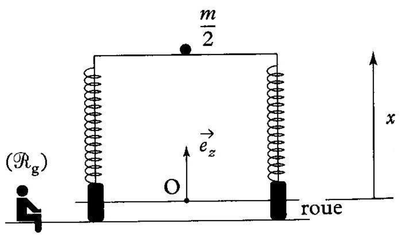
**7 :** *(**)* **Essieu avant d'un véhicule**.

On modélise l'essieu avant d'un véhicule à l'aide de deux ressorts de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$.

Une masse $\dfrac{m}{2}$ égale à la moitié de la masse du véhicule est posée dessus. On s'intéresse au mouvement vertical de l'essieu.

On suppose les roues indéformables (de rayon constant).

*Données* : $m = 1\,\text{tonne}$ ; $k = 19000\,\text{N.m}^{-1}$ ; $l_0 = 40\,\text{cm}$.




1. Montrer que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur et la longueur à vide.
2. Déterminer la position d'équilibre du système.
3. Le véhicule étant à l'arrêt, on enfonce la masse $\dfrac{m}{2}$ de $5\,\text{cm}$ et on la lâche.

   Etablir l'équation différentielle du mouvement, la résoudre et déterminer l'accélération maximale.

**8 :** *(*)* **Régime oscillatoire amorti**.

Une sphère M (masse $m$, petit rayon $r$), de faible vitesse $\vec{v}$, plongée dans un liquide de coefficient de viscosité $\eta$, est soumise à une force de frottement du type $\vec{f} = -6\pi r \eta \vec{v}$.

La sphère est suspendue à un ressort de raideur $k$. La période d'oscillation dans l'air (frottements négligeables) est égale à $T_0$. On note $T$ la pseudo-période du mouvement de M dans le liquide.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner l'expression de la pseudo-pulsation $\Omega$ du mouvement en fonction des données du problème.
3. Exprimer $\eta$ en fonction de $m, r, T_0$ et $T$.





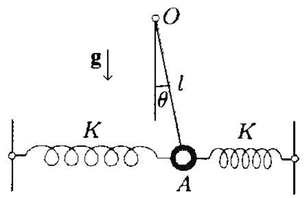
## Pendule simple AUX PETITES OSCILLATIONS

**9 :** *(*)* Un pendule simple de longueur $l = 30\,\text{cm}$ est écarté faiblement par rapport à la verticale et lâché sans vitesse initiale.

1. Rappeler l'équation différentielle vérifiée par l'angle $\theta$ formé par le fil avec la verticale. Que devient-elle lors d'oscillations de petite amplitude ?
2. Déterminer et calculer la durée $\Delta t$ mise par le pendule pour passer la verticale.

**10 :** *(**)* **Pendule simple et élastique**.

La masselotte d'un pendule simple est soumise à l'action de deux ressorts identiques qui exercent des forces de rappel horizontales.



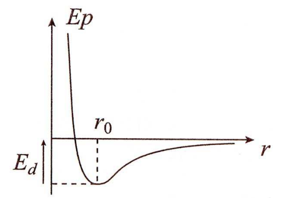

1. Sachant que ces forces de rappel sont nulles lorsque le pendule est vertical :
   a. Etablir l'équation différentielle des petites oscillations du pendule simple.
   b. En déduire l'expression de la période des petites oscillations.
2. Une force de frottement visqueux provoque un amortissement dont le coefficient $\alpha$ est égal au dixième du coefficient critique.
   a. Etablir la nouvelle équation différentielle des petites oscillations du pendule simple.
   b. Calculer le facteur de qualité du pendule.

## Autres oscillateurs :

**11 :** *(*)* **Vibration d'une molécule diatomique**.

La molécule diatomique $HCl$ est modélisée, selon un axe fixe, par deux masses ponctuelles distantes de $r$. Puisque l'atome de chlore est beaucoup plus lourd que celui d'hydrogène, il peut être considéré comme fixe ; seul le noyau d'hydrogène de masse m est alors susceptible de se déplacer, il subit l'énergie potentielle d'interaction $E_p(r) = \dfrac{C}{r^n} - \alpha\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$, où $C$, $\alpha$ et $n$ sont des constantes positives $(n > 1)$.

En l'absence de tout champ extérieur, la distance d'équilibre inter-atomique est $r_0$. L'énergie minimale à fournir pour dissocier cette molécule sera notée $E_d$.




1. Exprimer la distance d'équilibre $r_0$.
2. En déduire l'expression de l'énergie de dissociation $E_d$.
3. Déterminer l'expression de la constante de raideur $k$ du ressort équivalent au système, au voisinage de la position d'équilibre.
4. En déduire la pulsation $\omega_0$ des petites oscillations de la molécule en fonction de k et m, puis en fonction de $E_d, n, m$ et $r_0$.
5. Des mesures spectroscopiques permettent d'accéder expérimentalement à $r_0, \omega_0$ et $E_d$ : $r_0 = 1,27.10^{-10}\,\text{m}$ ; $\omega_0 = 5,45.10^{14}\,\text{s}^{-1}$ ; $E_d = 400\,\text{kJ.mol}^{-1}$.

   Ces mesures permettent de déterminer les caractéristiques de l'interaction entre les atomes de chlore et d'hydrogène dans la molécule de chlorure d'hydrogène. Déterminer les expressions littérales, puis les valeurs numériques, de $n, \alpha$ et $C$.

## 12 : (**) Oscillations d'une masse.

Une masse $m$ est fixée à un ressort sans masse, de raideur $k$ et de longueur à vide $l_0$, dont l'autre extrémité est fixée en $O$ dans le référentiel d'étude. Cette masse peut se déplacer sur l'horizontale $Ox$.
Initialement, le ressort est au repos et la masse immobile.

1. La masse subit une force constante $\vec{F} = F_0\,\vec{i}$, et on néglige les frottements. Déterminer $x(t)$.
2. En plus de la force $\vec{F}$ constante, la masse subit un frottement fluide $\vec{f}$ proportionnel à la vitesse $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$.
   a. Etablir l'équation du mouvement, en introduisant la pulsation propre $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$, que l'on exprimera en fonction des caractéristiques du système.
   b. Dans le cas d'un frottement faible, déterminer $x(t)$ en utilisant notamment le temps caractéristique $\tau$ d'amortissement des oscillations et de la pseudo-pulsation $\Omega$, que l'on exprimera en fonction de $\omega_0$ et $Q$.
   c. Dans le cas d'un frottement important, déterminer $x(t)$ en utilisant notamment $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\frac{1}{\tau'} = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$.
3. Effectuer un bilan énergétique pour en déduire le travail total de la force de frottement entre l'instant initial et la situation finale d'équilibre.

## 13 : (**) L'oscillateur d'Archimède.

Un cylindre homogène, de section $S$, de longueur $L$, de rayon $r$, de masse volumique $\mu$ flotte sur l'eau. Un système de guidage adapté permet de maintenir en permanence le déplacement du cylindre vertical.

1. Pour qu'une hauteur $h = \frac{L}{2}$ du cylindre soit immergée à l'équilibre, quelle relation doit-il exister entre les masses volumiques $\mu$ et $\mu_{eau}$ ?
2. Le système étant à l'équilibre dans les conditions précédentes, on l'enfonce et, on le lâche sans vitesse initiale.
   a. Etablir l'équation différentielle en $z$ (cote du centre d'inertie du cylindre par rapport à la surface de l'eau) en négligeant tout frottement. En déduire la nature du mouvement.
   b. Donner l'expression de la période propre des oscillations du solide.
3. En tenant maintenant compte de la viscosité $\eta$ de l'eau, le cylindre est soumis en outre à une force de frottement donnée par la formule de Stokes : $\vec{f} = -6\pi r\eta\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du cylindre.
   a. Etablir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la nature du mouvement ?
   b. Exprimer la période propre et le facteur de qualité du dispositif. Commenter.





**<u>Réponses et éléments de réponses :</u>**

**1 :** 1. $E_m = 2{,}5.10^{-2}\,\text{J}$. 2. $\left|\ell - \ell_0\right|_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$. $\left|\ell - \ell_0\right|_{\max} = 10{,}0\,\text{cm}$.

**2 :** 1. $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$. 2. $E_p = \frac{1}{2}ka^2\cos^2(\omega_0 t)$ ; $E_c = \frac{1}{2}ka^2\sin^2(\omega_0 t)$ ; $E_m = \frac{1}{2}ka^2$.

**3 :** 1. $k = \frac{mg}{\Delta l_{éq}}$. $k = 40\,\text{N.m}^{-1}$. 2. $v_0 = h\sqrt{\frac{k}{m}}$. $v_0 = 2{,}83.10^{-1}\,\text{m.s}^{-1}$. 3. $\Delta l(t) = \Delta l_{éq} - v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$, $\Delta l_{\max} = \Delta l_{éq} + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$.
$\Delta l_{\max} = 5{,}5\,\text{cm}$.

**4 :** 1. $l_{éq} = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}$. 2. $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$.

**5 :** b. $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. $\Omega = 10\,\text{rad.s}^{-1}$. c. $\Delta t = 5\tau = \frac{10m}{h}$. $\Delta t = 0{,}5\,\text{s}$.

**6 :** a. $z_{éq} = \frac{mg}{k}$. b. $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{éq}$. c. $z(t) = z_{éq} - \frac{mg}{k}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)e^{-\lambda t} \approx z_{éq} - \frac{mg}{k}\cos(\omega_0 t)e^{-\lambda t}$.

**7 :** 1. k' = 2k ; $l_0' = l_0$. 2. $x_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{mg}{4k}$. 3.a. $\ddot{x} + \frac{4k}{m}x = \frac{4k}{m}x_{\text{eq}}$ ; $x(t) = x_{\text{eq}} - a\cos(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$. b. $\ddot{x}_{\max} = \frac{4ka}{m}$,
$\ddot{x}_{\max} = 3{,}8\,m.s^{-2}$.

**8 :** 1. $\ddot{z} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -g - \frac{k\ell_0}{m}$ 3. $\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$.

**9 :** 2. $\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$. $\Delta t = 8{,}60\,\text{ms}$.

**10 :** 1. a. $\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$. b. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{mg + 2k\ell}}$. 2.a. $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0$. b. $Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}$.

**11 :** 1. $r_0 = \left(\frac{4\pi\varepsilon_0 nC}{\alpha e^2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. 2. $E_d = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$. 3. $k = \frac{(n-1)\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}$. 4. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{nE_d}{mr_0^2}}$.
5. $n = \frac{m\omega_0^2 r_0^2}{E_d}$ ; $\alpha = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_0^3 m\omega_0^2}{(n-1)e^2}$ ; $C = \frac{\alpha e^2 r_0^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0 m}$. $n = 12{,}0$ ; $\alpha = 0{,}400$ ; $C = 1{,}06.10^{-138}\,J.m^{12}$.

**12 :** 1. $x(t) = l_0 + \frac{F_0}{k}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]$, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
2. Frottement faible : $x(t) = l_0 + \frac{F_0}{k}\left[1 - \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega\tau}\right)\right]$, avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ ;
Frottement important : $x(t) = l_0 + \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k}\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}\left[\cosh\left(\frac{t}{\tau'}\right) + \frac{\tau'}{\tau}\sinh\left(\frac{t}{\tau'}\right)\right]$. 3. $W_{0\to\infty}\left(\vec{f}\right) = \frac{-F_0^2}{2k}$.

**13 :** 1. $\mu_{\text{eau}} = 2\mu$. 2. $\ddot{z} + \frac{2g}{L}z = 0$ ; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$. 3. $\ddot{z} + \frac{6\eta}{\mu Lr}\dot{z} + \frac{2g}{L}z = 0$ ; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ ; $Q = \frac{\mu r\sqrt{Lg}}{3\sqrt{2}\eta}$.