

## Méca 5 : LE THEOREME DU MOMENT CINETIQUE.

Afin de lier les causes du mouvement à la nature de celui-ci, nous avons déjà le principe fondamental de la dynamique, le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique.

Ici, on introduit un nouveau théorème permettant de mettre en équation un mouvement et particulièrement adapté aux mouvements de rotation :

Le théorème du moment cinétique.

Pour cela, nous allons définir le moment d'une force (par rapport à un point ou un axe), le moment cinétique d'un point matériel (par rapport à un point ou un axe) puis déduire du principe fondamental de la dynamique le théorème du moment cinétique.

### I. MOMENT D'UNE FORCE.

1. *Moment d'une force par rapport à un point A.*
2. *Moment d'une force par rapport à un axe  $\Delta = (A, \vec{u})$ .*

### II. MOMENT CINETIQUE D'UN POINT MATERIEL.

1. *Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point A.*
2. *Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe  $\Delta = (A, \vec{u})$ .*

### III. THEOREME DU MOMENT CINETIQUE D'UN POINT MATERIEL.

1. *Théorème du moment cinétique par rapport à un point A.*
2. *Théorème du moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta = (A, \vec{u})$ .*

### IV. APPLICATIONS.

1. *Conservation du moment cinétique.*
2. *Mise en équation d'un mouvement.*

#### Objectifs

#### Savoirs :

- € Savoir exprimer le moment d'une force par rapport à un point ou à un axe orienté.
- € Savoir exprimer le moment cinétique d'un point matériel dans un référentiel R donné par rapport à un point ou à un axe.
- € Connaître les théorèmes du moment cinétique par rapport à un point ou un axe orienté.

#### Savoirs faire :

- € Savoir utiliser les théorèmes du moment cinétique :
  - Pour mettre en équation un problème mécanique ;
  - Pour montrer qu'il y a conservation du moment cinétique ;
  - Pour montrer qu'un mouvement est plan ;
  - Pour montrer qu'un mouvement suit la loi des aires.
- € Savoir retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule simple par le théorème du moment cinétique.

Et EVIDEMMENT ! *Etre capable de refaire tous les exemples du cours (ultra-classiques) ainsi que tous les exercices corrigés en TD.*

## Questions de cours

1. Définir le **moment d'une force par rapport à un point A**.
  - a. Déterminer la norme du moment d'une force par rapport à un point A en fonction de la norme  $F = \|\vec{F}\|$  et du bras de levier  $d$ .
  - b. Cas particuliers : déterminer le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point A lorsque la droite d'action de  $\vec{F}$  passe par A.
2. Définir le **moment d'une force par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$** .
  - a. Montrer que le moment d'une force par rapport à l'axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$  ne dépend pas du point A de l'axe choisi pour calculer le moment.
  - b. Donner son expression en fonction de  $F = \|\vec{F}\|$  et du bras de levier  $d$ .
  - c. Cas particuliers :
    - i. Déterminer le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$  lorsque la droite d'action de  $\vec{F}$  est parallèle à  $\Delta = (A, \vec{u})$ .
    - ii. Déterminer le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$  lorsque la droite d'action de  $\vec{F}$  coupe l'axe  $\Delta = (A, \vec{u})$ .
3. Donner deux cas dans lesquels le moment d'une force par rapport à un axe est nul.
4. Définir le **moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point A**.
  - a. Un point matériel de masse  $m$  décrit une trajectoire rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{v}_0$  située à la distance  $b$  du point  $O$ . Quel est son moment cinétique par rapport au point  $O$  ?
  - b. Un point matériel de masse  $m$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ . Quel est son moment cinétique par rapport au point  $O$  ?
5. Définir le **moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$** .
  - a. Un point matériel de masse  $m$  décrit une trajectoire rectiligne uniforme dans le plan  $xOy$  à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$  située à la distance  $b$  du point  $O$ . Quel est son moment cinétique par rapport à l'axe  $Ox$  ? par rapport à l'axe  $Oy$  ? par rapport à l'axe  $Oz$  ?
  - b. Un point matériel de masse  $m$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$  et d'axe  $Oz$ . Quel est son moment cinétique par rapport à l'axe  $Oz$  ? Quel est son moment cinétique par rapport à l'axe  $OZ$  incliné de  $\alpha$  par rapport à  $Oz$  ?
6. Enoncer (sans oublier les hypothèses) et démontrer le **théorème du moment cinétique par rapport à un point A**.
7. Enoncer (sans oublier les hypothèses) et démontrer le **théorème du moment cinétique par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$** .
8. Dans quels cas (en citer 2) a-t-on conservation du moment cinétique par rapport à un point A ?
9. Dans quels cas (en citer 3) a-t-on conservation du moment cinétique par rapport à un axe orienté  $\Delta = (A, \vec{u})$  ?
10. Quelles sont les conséquences sur le mouvement de la conservation du moment cinétique par rapport à  $O$  ?
  - a. Montrer que dans ce cas, le mouvement est plan. Préciser quel est ce plan.
  - b. Introduire la constante des aires  $C = r^2 \dot{\theta}$ .
  - c. Déterminer la vitesse aréolaire du mouvement du point matériel et en déduire que le mouvement suit la loi des aires.
11. Déterminer l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique.